1. EXERCICE.

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^{\perp}$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle . , . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?

2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a. Montrer que :
   $$M^2 = -Q.$$

   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

   d. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :
   $$g_\theta = Id + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$$
   où $f^2 = f \circ f$.

   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. *Etude de la dérivabilité de F.*

   a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

   $$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.$$

   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

   $$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant K\,|h|.$$

   d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en* $+\infty$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leqslant f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. PROBLEME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t)\,dt$.
L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
   On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On considère pour " n suffisamment grand " que $\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application :*

a. A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$.

b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
En utilisant le résultat de la question **3.1.2**. et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
begin
 randomize ;
 readln(n) ;
 J := 0 ;
 for i := 1 to n do ....
 ...........
 writeln (' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.
```

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1-U$.
   On définit la variable aléatoire Y par $Y=\frac{1}{2}[g(U)+g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$?

2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u,w)\in[0,1]^2$,
   $$(g(u)-g(w))\,(g(1-u)-g(1-w))\leqslant 0.$$

   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U)-g(W))\,(g(1-U)-g(1-W))\right]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E\left[g(U)g(1-U)\right]\leqslant\left(E\left[g(U)\right]\right)^2.$$
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y)\leqslant\frac{1}{2}V\left(g(U)\right)$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note :
$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$$
la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.
Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
$${}^t H\, \nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par
$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$
et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U} = U_1 1_{[T\in I_1]} + U_2 1_{[T\in I_2]} + U_3 1_{[T\in I_3]}$ où 1_A désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :
$$\widetilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,
$$P(g(\widetilde{U}) \leqslant x) = aP(g(U_1) \leqslant x) + (b-a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1-b)P(g(U_3) \leqslant x).$$
En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$E\left(g(\widetilde{U})\right) = aE\left(g(U_1)\right) + (b-a)E\left(g(U_2)\right) + (1-b)E\left(g(U_3)\right).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3})$ telles que :
• $U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
• $U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
• $U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,
et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\left(g(U_1)\right) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\left(g(U_2)\right) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\left(g(U_3)\right).$$

4. *Application numérique :*
On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2V\left(g(U_1)\right) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\left(g(U_2)\right) = 1, \quad (1-b)^2V\left(g(U_3)\right) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

ECRICOME VOIE 2008 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

Nous noterons $E = \mathbb{R}^3$.

1)

$\forall z \in E,\ \exists!(v,w) \in D \times D^{\perp}\ /\ z = v + w$.

Par définition, $v = p(z)$ et $w = q(z)$, donc $(p+q)(z) = z$.

$$\boxed{p + q = \mathrm{Id}}$$

2)

$\forall v \in E,\ v = p(v) + q(v)$.

Or $p(v) \in D = \mathrm{vect}(u)$, il en resulte qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\boxed{p(v) = \alpha u \quad \mathbf{(1)}}$

On a donc $v = \alpha u + q(v)$.

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, on a :

$$\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha u + q(v)\rangle = \alpha\langle u, u\rangle + \langle u, q(v)\rangle. \qquad \mathbf{(2)}$$

Par définition de q, $q(v) \in D^{\perp}$, donc $\langle u, q(v)\rangle = 0$. D'autre part, le vecteur u est normé, donc $\langle u, u\rangle = ||u||^2 = 1$, .

L'égalité précédente **(2)** donne $\langle u, v\rangle = \alpha$ et l'égalité **(1)** donne $\boxed{\forall v \in E,\ p(v) = \langle u, v\rangle u}$

Remarque : En fait, nous venons de refaire une démonstration du cours.

D'après l'énoncé, $u = ai + bj + ck$, et puisque la base (i,j,k) est orthonormée, $a = \langle u, i\rangle$, $b = \langle u, j\rangle$ et $c = \langle u, k\rangle$.

D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} p(i) &= \langle u, i\rangle u = au = a^2 i + abj + ack \\ p(j) &= \langle u, j\rangle u = bu = abi + b^2 j + cbk \\ p(k) &= \langle u, k\rangle u = cu = aci + bcj + c^2 k \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}}$$

3–a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b^2+c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2+c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

Puisque le vecteur u est normé, on a $a^2+b^2+c^2=1$; il en résulte immédiatement que $M^2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & ac \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On a bien } M^2 = -Q}$$

3–b)

- Le vecteur $f(u)$ a pour colonne de coordonnées $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (il suffit de faire le calcul). Il en résulte que $f(u) = 0_E$, ou encore $u \in \text{Ker } f$.

Puisque $u \neq 0_E$, on conclut que $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$, donc $\dim \text{Ker } f \geq 1$. Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Im } f \leq 2$, soit $\boxed{\text{rang}(f) \leq 2}$

- La matrice M n'est pas nulle puisque au moins un des termes a, b, c ne l'est pas (on a $a^2+b^2+c^2=1$). Donc $1 \leq \text{rang}(f) \leq 2$

Si $\text{rang}(f) = 1$, cela veut dire que la matrice M est de rang 1, donc que les 3 colonnes sont proportionnelles. Les rôles de a, b, c sont symétriques, une des colonnes au moins n'est pas nulle, supposons que ce soit la première. Alors les deux autres lui sont proportionnelles : on aura donc simultanément $c = 0$, $a = -b$ et $b = 0$, $c = -a$, cela donne $a = b = c = 0$, ce qui est impossible

Conclusion : le rang de f n'est pas égal à 1

$$\boxed{\text{rang}(f) = 2 \text{ et par conséquent } \dim \text{Ker } f = 1}$$

- On remarque que $f(i), f(j)$ et $f(k)$ sont orthogonaux à u (par exemple $f(i) = cj - bk$ et $u = ai + bj - ck$, donc $\langle f(i), u \rangle = bc - bc = 0$), ce qui implique qu'ils appartiennent à $D^\perp$: on conclut que $\text{Im } f \subset D^\perp$.

$$\boxed{\text{Im } f \subset D^\perp \text{ et } \dim \text{Im } f = \dim D^\perp = 2, \text{ donc } \text{Im } f = D^\perp}$$

$\dim \text{Ker } f = 1$ et $u \neq 0_E \in \text{Ker } f$, donc $\boxed{\text{Ker } f = D}$

3–c)

$\forall v \in E,\ (f \circ p)(v) = f(p(v)) = 0_E$ car $p(v) \in D = \text{Ker } f$.

$$\boxed{f \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

$\forall v \in E,\ f^2(v) = -q(v)$ puisque $M^2 = -Q$, donc $v + f^2(v) = v - q(v) = p(v)$; cela veut dire $\text{Id}_E + f^2 = p$.

D'autre part, $f + f^3 = f \circ (\text{Id} + f^2)$, donc $\forall v \in E,\ (f+f^3)(v) = f((\text{Id}+f^2)(v)) = f(p(v)) = 0_E$.

> La démonstration précédente prouve que $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$; cela veut dire que la polynôme $X + X^3$ (qui n'est pas le polynôme nul) est annulateur de f

3–d)

D'après le cours, on sait que les valeurs propres possibles de f sont les racines de $X + X^3$. Or ce polynôme n'admet dans $\mathbb{R}$ qu'une seule racine, 0, puisque $X + X^3 = X(1+X^2)$: $\text{spect}(f) \subset \{0\}$.

Or dim Ker $f = 1 \neq 0 \Longrightarrow 0 \in \text{spect}(f)$: $\boxed{\text{spect}(f) = \{0\}}$

Si f était diagonalisable, sa matrice M serait semblable à une matrice diagonale sur la diagonale de laquelle il n'y aurait que des zéros, donc M serait semblable à la matrice nulle (0) ; il existerait une matrice de passage R telle que $M = R(0)R^{-1} = (0)$: M serait nulle ce qui est faux.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

4–a)

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= (\text{Id} + (\sin\theta)f + (1-\cos\theta)f^2) \circ (\text{Id} + (\sin\theta')f + (1-\cos\theta')f^2) \\ &= \text{Id} + (\sin\theta')f + (1-\cos\theta')f^2 + (\sin\theta)f + (\sin\theta\sin\theta')f^2 + \sin\theta(1-\cos\theta')f^3 \\ &\quad + (1-\cos\theta)f^2 + \sin\theta'(1-\cos\theta)f^3 + (1-\cos\theta')(1-\cos\theta)f^4 \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$; l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= \text{Id} + (\sin\theta')f + (1-\cos\theta')f^2 + (\sin\theta)f + (\sin\theta\sin\theta')f^2 - \sin\theta(1-\cos\theta')f \\ &\quad + (1-\cos\theta)f^2 - \sin\theta'(1-\cos\theta)f - (1-\cos\theta')(1-\cos\theta)f^2 \\ &= \text{Id} + (\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)f + (1 - (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'))f^2 \\ &= \text{Id} + \sin(\theta+\theta')f + (1-\cos(\theta+\theta'))f^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2,\ g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}}$$

4–b)

On remarque que $g_0 = \text{Id}$, donc $\forall \theta \in \mathbb{R},\ g_\theta \circ g_{-\theta} = g_{-\theta} \circ g_\theta = g_0 = \text{Id}$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{-\theta}}$$

EXERCICE II

1–a)

$f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$, donc $f_n(x) = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ si $x > 0$; on reconnaît dans $\dfrac{1}{n^2}$ le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$, donc la série de terme général $\dfrac{x}{n^2}$ est convergente et par la règle d'équivalence des séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum \dfrac{x}{n(n+x)}$ est convergente. Comme il est clair que la série de terme général 0 converge on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \text{la série } \sum f_n(x) \text{ est convergente}}$$

1–b)

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

2)

$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$, donc $\forall x \geq 0,\ f_n'(x) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

$$\boxed{\text{Par équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum f_n'(x) \text{ est convergente}}$$

3–a)

Sur $[x, x_0]$ ou $[x_0, x]$, la fonction φ est de classe C^∞, donc de classe C^2 et on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}$

Comme t est entre x et x_0 (ou x_0 et x) et que l'un et l'autre sont supérieurs à n, on en déduit que $t \geq n$, donc $\varphi''(t) = |\varphi''(t)| \leq \dfrac{2}{n^3}$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq |\frac{x - x_0)^2}{2}|\frac{2}{n^3},\ \text{d'où le résultat}$$

$$\boxed{\forall (x, x_0) \in (\ [n, +\infty[\ )^2,\ |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}}$$

3–b)

Soit $x \geq 0$ et $h \neq 0$ / $x + h \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(n+x+h) + h\varphi'(n+x) \\ &= -\Big(\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi'(n+x)\Big) \end{aligned}$$

Puique $n + x + h$ et $x + n$ sont supérieurs ou égaux à n (vu que $x + h \in \mathbb{R}_+$), on peut appliquer le résultat précédent.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall h \neq 0\ /\ x + h \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}}$$

La série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ est une série convergente car $3 > 1$ en tant que multiple de la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^3}$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$ est convergente, donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la série de terme général } f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x) \\ \text{est absolument convergente donc convergente}\end{array}}$$

3–c)

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h}) - \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x})\Big) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h}) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}) - \frac{h}{(n+x)^2}\Big) \\ &\quad \text{d'après les opérations sur les séries convergentes} \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{h}{(n+x)^2}) \\ &= -\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)) \end{aligned}$$

La série $\sum(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))$ étant absolument convergente, on peut appliquer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue à la somme précédente.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x))\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^2}{n^3} \quad \text{d'après la question précédente} \\
&\leq \frac{1}{|h|}|h|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}
\end{aligned}$$

Posons alors $K=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, on a $K>0$ et il vient

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ \forall h\neq 0\ /\ x+h\geq 0,\ \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|\leq K|h|}$$

3–c)

Par encadrement, on a $\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|=0$ puisque $\lim_{h\to 0}K|h|=0$ et cela veut dire :

$$\forall x\geq 0,\ \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=G(x)$$

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ F \text{ est dérivable au point } x \text{ et } F'(x)=G(x) : F'=G}$$

4–a)

Posons, pour $t>0$, $h(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}$. On a $h'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+x)^2}$.

Or $x\geq 0$ et $t>0$ impliquent $0<t\leq t+x$, donc $0<\frac{1}{(t+x)^2}\leq\frac{1}{t^2}$ puisque la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; il s'ensuit que $\forall k\geq 1$, la fonction h est décroissante sur $[k,k+1]$, donc $\forall t\in[k,k+1]$, $h(k+1)\leq h(t)\leq h(k)$

Intégrons ces inégalités entre k et $k+1$, il vient (puisque $k<k+1$) :

$$\boxed{h(k+1)\leq\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq h(k)}$$

Or $h(k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}=f_k(x)$ et bien-sûr $h(k+1)=f_{k+1}(x)$; l'encadrement précédent devient :

$$\boxed{\forall k\geq 1,\ f_{k+1}(x)\leq\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq f_k(x) \qquad \mathbf{(1)}}$$

En appliquant le résultat précédent, pour $k\geq 2$, entre $k-1$ et k, on obtient

$$\boxed{\forall k\geq 2,\ f_k(x)\leq\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq f_{k-1}(x) \qquad \mathbf{(2)}}$$

4–b)

Dans l'encadrement **(1)** , on somme pour k variant entre 1 et n les inégalités de droite ; cela donne

$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ et en utilisant la relation de Chasles dans le terme de gauche de cette dernière inégalité, il vient

$$\int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Dans l'encadrement **(2)** , on somme pour k variant entre 2 et n les inégalités de gauche et on utilise la relation de Chasles ; cela donne

$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt$; ajoutons aux deux termes $f_1(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{x+1}$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1}+\int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt \qquad \textbf{(4)}$$

La comparaison de **(3)** et **(4)** donne le résulatat :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \forall k \geq 2,\ \int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1}+\int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt \qquad \textbf{(5)}}$$

4–c)

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\Big)dt &= \Big[\ln|t|-\ln|t+x|\Big]_{1}^{n+1}\\ &= \ln(n+1)-\ln(n+1+x)+\ln(1+x)=\ln\frac{n+1}{n+1+x}+\ln(1+x)\end{aligned}$$

L'encadrement **(5)** s'écrit alors

$$\ln\frac{n+1}{n+1+x}+\ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1}+\ln\frac{n}{n+x}+\ln(1+x)$$

$\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n+1}{n+1+x}=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n}{n+x}=0$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+1+x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+x}=1$ et la fonction $\ln$ est continue au point 1. On conclut, puisque chaque terme de l'encadrement **(5)** a une limite que

$\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln\frac{n+1}{n+1+x}+\ln(1+x)\Big) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{x}{x+1}+\ln\frac{n}{n+x}+\ln(1+x)\Big)$; ce qui donne

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$, donc $\frac{x}{x+1}\underset{(x\to+\infty)}{=}\circ(\ln(1+x))$. Il en résulte que $(\frac{x}{x+1}+\ln(1+x))\underset{(x\to+\infty)}{\sim}\ln(1+x)$

$F(x)$ est encadré entre deux termes équivalents, donc $\boxed{F(x)\underset{(x\to+\infty)}{\sim}\ln(1+x)}$

III PROBLEME

3.1 Méthode de Monte-Carlo

3.1.1–a)

Une densité de U est f donnée par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0;1] \\ 1 & \text{si } t \in [0;1] \end{cases}$

3.1.1–b)

g est continue sur $[0;1]$, donc $|f \times g| = f \times |g|$ également . De plus la fonction $f \times |g|$ est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f \times g|(t)dt = \int_0^1 |f \times g|(t)dt = \int_0^1 f(t) \times |g|(t)dt$, intégrale qui existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

D'après le théorème du transfert, la variable $g(U)$ admet une espérance donnée, en plus, par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

$$\boxed{\text{La variable } g(U) \text{ admet une espérance et } E(g(U)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = J}$$

3.1.2–a)

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, la variable $g(U_i)$ possède une espérance égale à J d'après la question précédente. Donc S_n aussi et, par linéarité de l'espérance, $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(g(U_i)) = J$.

De plus les variables $g(U_i)$ sont mutuellement indépendantes, par hypothèse elles admettent la même variance σ^2, donc S_n admet une variance et $V(S_n) = n\sigma^2$.

$V\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} V(S_n) = \dfrac{\sigma^2}{n} > 0$. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à la variable $\dfrac{S_n}{n}$ (les conditions sont remplies).

$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$, soit encore $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

> Par encadrement, $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) = 0$
>
> cela veut dire : la suite $(\frac{S_n}{n})$ converge en probabilité vers J

3.1.2–b)

i) La variable S_n est la somme de n variables aléatoires de même loi, admettant une espérance et une variance non nulle, mutuellement indépendantes. **D'après le théorème de la limite centrée, la variable centrée réduite associée converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée, réduite.** La variable centrée, réduite associée à S_n est $S_n^* = \dfrac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma}$.

Or $\dfrac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma} = \dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Donc

$$\boxed{\text{La suite } \dfrac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ converge en loi vers une variable qui suit la loi } \mathcal{N}(0,1)}$$

ii)
Si l'on considère que pour " n assez grand " S_n^* suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on peut dire que

$$\forall t \geq 0,\ P\Big(-t \leq \frac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t\Big) = 2\Phi(t)-1 \text{ d'après un résultat bien connu du cours}$$

$$\begin{aligned} -t \leq \frac{\frac{S_n}{n}-J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t \quad &\Longleftrightarrow -t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} - J \leq t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{car } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

La proposition précédente devient

$$\forall t \geq 0,\ P\Big(\frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 2\Phi(t)-1$$

ou encore

$$\forall t \geq 0,\ P\Big(J \in [\frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]\Big) = 2\Phi(t)-1$$

L'intervalle cherché au niveau de confiance 0.95 est celui pour lequel $2\Phi(t)-1 = 0.95$, ce qui donne $\Phi(t) = 0.975$, donc d'après le texte $t = 1.96$

$$\boxed{\text{L'intervalle de confiance cherché au niveau de confiance } 0.975 \text{ est } [\frac{S_n}{n} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}]}$$

3.1.3)

Application 3.1.3–a)
Posons $t = \sin u$ avec $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique $t \in [0;1]$; alors $dt = \cos du$; $\sqrt{1-t^2} = |\cos u| = \cos u$ puisque $u \in [0, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \cos u \geq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt \quad &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 u du \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)du \\ &= 2\Big[u + \frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2(\frac{\pi}{2} - 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{J = \pi}$$

3.1.3–b)

i)
```
function G(t : real) : real ;
var z : real ;
begin
    z := 4*sqrt(1-sqr(t)) ;
    G := z ;
end ;
```

ii)

Soit U une variable qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$, cette loi étant simulée par random et $g\ :\ t \mapsto 4\sqrt{1-t^2}$. Alors $g(U) = 4\sqrt{1-U^2}$.

D'après la question **3.1–b)** la variable $g(U)$ a une espérance qui vaut $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}dt = \pi$.

Si l'on envisage n variables aléatoires U_i qui suivent la loi uniforme, alors

D'après 3.1.2–a), $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ converge en probabilité vers $\pi = J$, d'où le programme

```
program ecricome2008 ;
BEGIN
randomize ;
readl(n) ;
J:=0;
for i:=1 to n do J:= G(random)+J ;
J:=J/n ;
writeln(' une valeur approchée de pi est '; J) ;
END.
```

3.2 Réduction de la variance par variables antithétiques

3.2.1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(1-U \leq x) = P(U \geq 1-x) = 1 - P(U < 1-x) = 1 - P(U \leq 1-x)$ car U est une variable à densité.

Si $x \leq 0$, alors $1-x \geq 1$, donc $P(U \leq 1-x) = 1$

Si $x \in [0;1]$, alors $1-x \in [0;1]$, donc $P(U \leq 1-x) = 1-x$ puisque U suit la loi uniforme sur $[0;1]$

Si $x > 1$, alors $1-x < 0$, donc $P(U \leq 1-x) = 0$.

Finalement $P(1-U \leq x) = \begin{cases} 1-1=0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)=x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-0=1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

U et $1-U$ suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, donc $g(U)$ et $g(1-U)$ ont la même espérance J. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = \frac{1}{2}\Big(E(g(U)) + E(g(1-U))\Big) = E(g(U)) = J$$

3.2.2–a)

$\forall (u,w) \in [0;1]^2,\ u \leq w \iff 1-u \geq 1-w$. Donc, dans ces conditions, $g(u)-g(w) \leq 0$ et $g(1-u)-g(1-w) \geq 0$, d'où $(g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0$. Par raison de la symétrie des rôles joués par u et w, on obtient le même résultat si $u \geq w$.

$$\boxed{\forall (u,w) \in [0;1]^2, (g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0}$$

3.2.2–b)

La variable $Z = (g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))$ est négative ou nulle, son espérance aussi. Développons cette espérance $E(Z)$.

$$\begin{aligned}E(Z) &= E\Big((g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))\Big)\\ &= E\Big(g(U)g(1-U)-g(U)g(1-W)-g(W)g(1-U)+g(W)g(1-W)\Big)\\ &= E\Big(g(U)g(1-U)\Big)-E\Big(g(U)g(1-W)\Big)-E\Big(g(W)g(1-U)\Big)+E\Big(g(W)g(1-W)\Big)\end{aligned}$$

Les variables U et W suivent la même loi (uniforme sur $[0;1]$), donc les variables $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ suivent aussi la même loi et elles admettent la même espérance.

Les variables U et W sont indépendantes, donc $g(U)$ et $g(1-W)$ aussi d'après le cours , de même $g(W)$ et $g(1-U)$.

Donc $E\Big(g(U)g(1-W)\Big) = E\Big(g(W)g(1-U)\Big) = \Big(E(g(U))\Big)^2$ car $U, W, 1-U$ et $1-W$ suivent la même la loi (l'uniforme sur $[0;1]$).

L'expression de $E(Z)$ devient $E(Z) = 2E\Big(g(U)g(1-W)\Big) - 2\Big(E(g(U))\Big)^2$.

$$\boxed{\text{Or } E(Z)\le 0, \text{ donc } E\Big(g(U)g(1-W)\Big) = E\Big(g(U)\Big)\Big(g(1-W)\Big) \le \Big(E(g(U))\Big)^2}$$

3.2.2–c)

- $E(g(U)^2) = \displaystyle\int_0^1 t^2 g(t)dt$, quantité qui existe car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[0;1]$; donc les variances et covariances utilisées par la suite existent.

$$\begin{aligned}V(Y) &= \tfrac{1}{4}\Big(V(g(U))+V(g(1-U))+2\operatorname{cov}(g(U),g(1-U))\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U))+\tfrac{1}{2}\operatorname{cov}(g(U),g(1-U)) \qquad \text{car } V(g(U))=V(g(1-U))\\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U))+\tfrac{1}{2}\Big(E(g(U)g(1-U))-E(g(U))E(g(1-U))\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U))+\tfrac{1}{2}\Big(\underbrace{E(g(U)g(1-U))-(E(g(U)))^2}_{\le 0}\Big)\end{aligned}$$

(d'après 3.2.2-b) appliqué $W=U$)

$$\boxed{V(Y)\le \tfrac{1}{2}V(g(U))}$$

3.2.3)

$E(Y)=J$. Considérons une suite Y_i de variables indépendantes, de même loi que Y et posons, pour $n\ge 1$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Notons σ_1 la variance des variables Y_i

La variable $T_N^* = \dfrac{\frac{1}{N}T_N - J}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}}$ converge en loi vers une variable T qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Au seuil de confiance de 0.95, l'intervalle donné par $\dfrac{T_N}{N}$ est $[\dfrac{T_N}{N}-1.96\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}};\dfrac{T_N}{N}+1.96\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}}]$; sa longueur l_N est $2\times 1.96\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$ alors que $l_n = 2\times 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La question précédente indique que $(\sigma_1)^2 \le \dfrac{(\sigma)^2}{2}$, donc $\sigma_1 \le \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

On veut $l_N = l_n$, c'est-à-dire $2\times 1.96\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = 2\times 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. , ou encore $\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, et pour finir $\sigma = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1$.

or $\sigma \geq \sqrt{2}\sigma_1$, donc $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1 \geq \sqrt{2}\sigma_1$ puis $\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \geq \sqrt{2}\dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n}}$. On obtient $\sqrt{N} \leq \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{N \leq \frac{n}{2}}$

3.3 Réduction de la variance par stratification

3.3.1 Etude d'une fonction de plusieurs variables

3.3.1.1

f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$ comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = -\dfrac{1}{4x_1^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = -\dfrac{1}{x_2^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -\dfrac{1}{9x_3^2}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ne dépend que de x_i, on en déduit que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ pour $i \neq j$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{2x_1^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{x_2^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{9x_3^3}$

3.3.1.2

Par définition, la matrice hessienne de f au point $A = (a_1,a_2,a_3) \in (\ ]0,+\infty[\ )^3$ vaut

$$\nabla^2(f)(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$$

Soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, il est immédiat que

$$\boxed{{}^tH\nabla^2(f)(A)H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} > 0 \text{ car les } a_i \text{ sont } > 0 \text{ et } (h_1,h_2,h_3) \neq (0,0,0)}$$

3.3.1.3

$\forall A \in (\ [0,+\infty[\ )^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(A) \neq 0$, donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum sur }]0,+\infty[^3}$

3.3.1.4

On a donc, par exemple, $x_3 = 110 - x_1 - x_2$.

$f(x_1,x_2,110-x_1-x_2) = F(x_1,x_2) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9(110-x_1-x_2)}$

La contrainte implique $x_1 + x_2 > 110$ car $x_3 > 0$

F est de classe C^2 sur $\Delta = (\ ]0,+\infty[\ )^2 - \{(x_1,x_2)\ /\ x_1+x_2 \leq 110\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4x_1^2} + \frac{1}{9(110-x_1-x_2)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= -\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{9(110-x_1-x_2)^2} \end{aligned}$$

La couple (x_1,x_2) est un point critique si et seulement si $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0$,

ce qui donne le système $\begin{cases} 9(110-x_1-x_2)^2 & = 4x_1^2 \\ 9(110-x_1-x_2)^2 & = x_2^2 \end{cases}$

Ce système implique $x_2^2 = 4x_1^2$ soit $x_2 = 2x_1$ ou $x_2 = -2x_1$. Ce deuxième cas est à rejeter car x_1 et x_2 sont strictement positifs

Soit $x_2 = 2x_1$. Le système devient alors successivement

$$\begin{array}{lll} x_2 = 2x_1 & \text{et} & 9(110 - x_1 - 2x_1)^2 = 4x_1^2 \\ x_2 = 2x_1 & \text{et} & 9(110 - x_1 - 2x_1)^2 - 4x_1^2 = 0 \\ x_2 = 2x_1 & \text{et} & (3(110 - 3x_1) - 2x_1)(3(110 - 3x_1) + 2x_1) = 0 \\ x_2 = 2x_1 & \text{et} & (330 - 11x_1)(330 - 7x_1) = 0 \end{array}$$

- $x_1 = 30$; alors $x_2 = 60$ et $x_3 = 110 - 90 = 20$. Cette solution est acceptable.
- $x_1 = \frac{330}{7}$, alors $x_2 = \frac{660}{7}$ et $x_3 = 110 - \frac{990}{7} < 0$. Cette solution est à rejeter.

$\boxed{\text{Sous la contrainte } x_1 + x_2 + x_3 = 110, \text{ il y a un unique point critique } A = (30, 60, 20)}$

Notons $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$ et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. On sait que, pour tout vecteur $H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{P}$, $A + H \in \mathcal{C}$ et $\langle \nabla f(A), H\rangle = 0$.

Remarque : Cela se vérifie sans problème car $\nabla f(A) = -\left(\frac{1}{4 \times 900}, \frac{1}{3600}, \frac{1}{9 \times 400}\right) \in \mathcal{P}^\perp$

- Il y a une autre façon de faire.

D'après le cours, les éventuels points critiques sous la contrainte $C : x_1+x_2+x_3 = 110$ sont les points $A = (a_1, a_2, a_3) \in C$ tels que $\nabla f(A) \perp \mathcal{P}$, donc tels que $\nabla f(A)$ soit colinéaire au vecteur $(1, 1, 1)$.

D'où le système $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ -\frac{1}{4a_1^2} = -\frac{1}{a_2^2} = -\frac{1}{9a_3^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ a_2 = 2a_1, \ a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{3}a_1 \end{cases}$

car tous les nombres sont > 0.

On obtient $a_1 + 2a_1 + \frac{2}{3}a_1 = 110$ d'où les solutions : $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ et $a_3 = 20$.

- Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \exists\,\theta \in [0;1] \ / \ \forall H \in \mathcal{P}, \ f(A+H) &= f(A) + \langle \nabla f(A), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tH\nabla^2(f)(A+\theta H)H \\ &= f(A) + \frac{1}{2}{}^tH\nabla^2(f)(A+\theta H)H \\ &\quad \text{car } \nabla f(A) \perp H, \text{ donc} \\ f(A+H) - f(A) &= \frac{1}{2}{}^tH\nabla^2(f)(A+\theta H)H \end{aligned}$$

Or on sait, d'après la question **3.1.2)** que ${}^tH\nabla^2(f)(A+\theta H)H > 0$ dès que $H \neq 0$, donc

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ possède au point } A = (30, 60, 20) \text{ un minimum} \\ \text{strict sous la contrainte } x_1 + x_2 + x_3 = 110 \end{array}}$

3.3.2 Méthode de stratification

3.3.2.1)

La variable T prend ses valeurs dans $[0;1]$, donc le système $(T \in I_1)$, $(T \in I_2)$, $(T \in I_3)$ est un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, P(g(\widetilde{U}) \leq x) = {} & P(T \in I_1)P_{(T\in I_1)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + P(T \in I_2)P_{(T\in I_2)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + \\ & P(T \in I_3)P_{(T\in I_3)}(g(\widetilde{U}) \leq x) \end{aligned}$$

Puisque T suit la loi uniforme sur $[0;1]$, $P(T \in I_1) = a$; de même $P(T \in I_2) = b - a$ et $P(T \in I_3) = 1 - b$. D'où le résultat

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(g(\widetilde{U}) \leq x) = aP_{(T\in I_1)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + (b-a)P_{(T\in I_2)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + (1-c)P_{(T\in I_3)}(g(\widetilde{U}) \leq x)$$

D'après l'énoncé, si $T \in I_k$ pour $1 \leq k \leq 3$, alors $\widetilde{U} = U_k$, donc l'égalité précédente devient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ P(g(\widetilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b-a)P(g(U_2) \leq x) + (1-c)P(g(U_3) \leq x)}$$

Notons F_i la fonction de répartition de la variable $g(U_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $\widetilde{F}$ celle de $g(\widetilde{U})$. L'égalité précédente indique que : $\widetilde{F} = aF_1 + (b-a)F_2 + (1-b)F_3$

Les variables $g(U_i)$ sont des variables à densité, donc leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il en résulte que $\widetilde{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux points où les fonctions F_i ne sont pas dérivables.

$g(\widetilde{U})$ est une variable à densité.

Pour avoir une densité de $g(\widetilde{U})$ on dérivera $aF_1 + (b-a)F_2 + (1-b)F_3$ là où elles sont toutes les trois dérivables et ailleurs on prendra pour valeur de la densité 0 par exemple. Si l'on note D l'ensemble où l'une des trois fonctions F_1, F_2, F_3 n'est pas dérivable, on aura

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{g(\widetilde{U})} = af_{g(U_1)} + (b-a)f_{g(U_2)} + (1-b)f_{g(U_3)} \\ \text{sur } \mathbb{R} - D \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \end{array}}$$

- Si $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors $g(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$. l'égalité précédente devient

$$f_{\widetilde{U}} = af_{U_1} + (b-a)f_{U_2} + (1-b)f_{U_3} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $x \notin [0,1]$, $f_{\widetilde{U}} = 0$ car les trois densités f_{U_i} sont nulles.

Si $x \in [0,a[$, $f_{U_1}(x) = \frac{1}{a}$ et $f_{U_i}(x) = 0$ pour $i = 2$ et $i = 3$, donc d'après **(1)** $f_{\widetilde{U}}(x) = \frac{a}{a} = 1$.

Si $x \in [a,b[$, f_{u_1} et f_{u_3} sont nulles et $f_{u_2}(x) = \dfrac{1}{b-a}$, on a bien $f_{\widetilde{U}}(x) = 1$.

De même pour $x \in [b,1]$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Finalement } \forall x \in [0;1],\ f_{\widetilde{U}}(x) = 1 \text{ et } \ f_{\widetilde{U}}(x) = 0 \text{ ailleurs :} \\ \text{on reconnaît une densité uniforme sur } [0;1] \end{array}}$$

3.3.2.2)

Toutes les espérances existent d'après la question **3.1–a)** appliquée aux variables U_i et par linéarité de l'espérance

$$\boxed{E(g(\widetilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3))}$$

3.3.2.3)

Toutes les variables sont indépendantes, admettent espérances et variances, donc

$$\begin{aligned} V(Z) &= \frac{a^2}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + \frac{(b-a)^2}{n_2^2}\sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + \frac{(1-b)^2}{n_3^2}\sum_{k=1}^{n_3} V(g(U_{3,k})) \\ &= \frac{a^2}{n_1^2}n_1 V(g(U_1)) + \frac{(b-a)^2}{n_2^2}n_2 V(g(U_2)) + \frac{(1-b)^2}{n_3^2}n_3 V(g(U_3)) \end{aligned}$$

car les variables $g(U_{1,i})$ suivent la même loi que U_1, les variables $g(U_{2,j})$ suivent la même loi que U_2 et les variables $g(U_{3,k})$ suivent la même loi que U_3.

On a donc l'égalité

$$\boxed{V(Z) = \frac{a^2}{n_1}V(g(U_1)) + \frac{(b-a)^2}{n_2}V(g(U_2)) + \frac{(1-b)^2}{n_3}V(g(U_3))}$$

3.3.2.4)

Avec les hypothèses de cette question, $V(Z) = \dfrac{1}{4n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{9n_3} = f(n_1, n_2, n_3)$

Reprenons l'expression de Z : $Z = \dfrac{a}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + \dfrac{(b-a)}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + \dfrac{(1-b)}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k})$.

Toutes les variables $g(U_{1,i})$ ont la même espérance $J_1 = \frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt$ en vertu de la question **3.1–b)** appliquée à U_1 qui suit la loi uniforme sur $[0,a]$

De même, toutes les variables $g(U_{2,j})$ ont la même espérance $J_2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ et toutes les variables $g(U_{3,k})$ ont la même espérance $J_3 = \frac{1}{1-b}\int_b^1 g(t)dt$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} E(Z) &= a\frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt + (b-a)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + (1-b)\frac{1}{1-b}\int_b^1 g(t)dt \\ &= \int_0^a g(t)dt + \int_a^b g(t)dt + \int_b^1 g(t)dt \end{aligned}$$

$$E(Z) = \int_0^1 g(t)dt = J$$

Z est un estimateur sans biais de J. Donc Z sera une approximation d'autant meilleure de J que le risque quadratique sera faible. Or ce risque est $V(Z)$. Comme $n_1 + n_2 + n_3 = 110$, on en conclut que

$$\boxed{\text{la meilleure estimation de } J \text{ est obtenue pour } (n_1, n_2, n_3) = (30, 60, 20)}$$