1. EXERCICE.

Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^\perp$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle .\,,\, . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?

2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}\,,\, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
   Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
   En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

   a. Montrer que :
   $$M^2 = -Q.$$

   b. Calculer $f(\vec{u})$.
   En déduire que $rg(f) \leqslant 2$.
   Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

   d. Quelles sont les valeurs propres de f ?
   f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :
   $$g_\theta = Id + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$$
   où $f^2 = f \circ f$.

   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. *Etude de la dérivabilité de F.*

   a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

   $$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

   $$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

   b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

   c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

   $$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant K\,|h|.$$

   d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

   a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leqslant f_k(x).$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. PROBLEME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t)\,dt$.
L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U.

   b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
   On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On considère pour " n suffisamment grand " que $\dfrac{\dfrac{S_n}{n} - J}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application :*

a. A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$.

b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
En utilisant le résultat de la question **3.1.2.** et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
begin
 randomize ;
 readln(n) ;
 J := 0 ;
 for i := 1 to n do ....
 .....
 writeln (' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.
```

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1-U$.
   On définit la variable aléatoire Y par $Y=\dfrac{1}{2}\left[g(U)+g(1-U)\right]$. Que vaut $E(Y)$?

2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u,w)\in[0,1]^2$,

   $$(g(u)-g(w))\,(g(1-u)-g(1-w))\leqslant 0.$$

   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U)-g(W))\,(g(1-U)-g(1-W))\right]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :

   $$E\left[g(U)g(1-U)\right]\leqslant\left(E\left[g(U)\right]\right)^2.$$

   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y)\leqslant\dfrac{1}{2}V\left(g(U)\right)$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2. On note :
$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$$
la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.
Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
$${}^tH\,\nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par
$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$
et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U} = U_1 1_{[T\in I_1]} + U_2 1_{[T\in I_2]} + U_3 1_{[T\in I_3]}$ où 1_A désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :
$$\widetilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) \text{ si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,
$$P(g(\widetilde{U}) \leqslant x) = aP(g(U_1) \leqslant x) + (b-a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1-b)P(g(U_3) \leqslant x).$$
En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$E\left(g(\widetilde{U})\right) = aE\left(g(U_1)\right) + (b-a)E\left(g(U_2)\right) + (1-b)E\left(g(U_3)\right).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3})$ telles que :
• $U_{1,1}, \ldots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
• $U_{2,1}, \ldots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
• $U_{3,1}, \ldots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,
et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\left(g(U_1)\right) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\left(g(U_2)\right) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\left(g(U_3)\right).$$

4. *Application numérique :*
On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2V\left(g(U_1)\right) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\left(g(U_2)\right) = 1, \quad (1-b)^2V\left(g(U_3)\right) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

ECRICOME VOIE 2008 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

Nous noterons $E = \mathbb{R}^3$.

1)

$\forall z \in E,\ \exists!(v,w) \in D \times D^\perp\ /\ z = v + w.$

Par définition, $v = p(z)$ et $w = q(z)$, donc $(p+q)(z) = z$.

$$\boxed{p + q = \mathrm{Id}}$$

2)

$\forall v \in E,\ v = p(v) + q(v).$

Or $p(v) \in D = \mathrm{vect}(u)$, il en resulte qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\boxed{p(v) = \alpha u}$ **(1)**

On a donc $v = \alpha u + q(v)$.

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, on a :

$$\langle u, v\rangle = \langle u, \alpha u + q(v)\rangle = \alpha\langle u, u\rangle + \langle u, q(v)\rangle. \qquad \textbf{(2)}$$

Par définition de q, $q(v) \in D^\perp$, donc $\langle u, q(v)\rangle = 0$. D'autre part, le vecteur u est normé, donc $\langle u, u\rangle = ||u||^2 = 1$, .

L'égalité précédente **(2)** donne $\langle u, v\rangle = \alpha$ et l'égalité **(1)** donne $\boxed{\forall v \in E,\ p(v) = \langle u, v\rangle u}$

Remarque : En fait, nous venons de refaire une démonstration du cours.

D'après l'énoncé, $u = ai + bj + ck$, et puisque la base (i, j, k) est orthonormée, $a = \langle u, i\rangle$, $b = \langle u, j\rangle$ et $c = \langle u, k\rangle$.

D'après le résultat précédent,

$$\begin{array}{ll} p(i) & = \langle u, i\rangle u = au = a^2 i + abj + ack \\ p(j) & = \langle u, j\rangle u = bu = abi + b^2 j + cbk \\ p(k) & = \langle u, k\rangle u = cu = aci + bcj + c^2 k \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a donc } P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = I - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}}$$

3−a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b^2+c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2+c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Puisque le vecteur u est normé, on a $a^2+b^2+c^2=1$; il en résulte immédiatement que $M^2=\begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & ac \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On a bien } M^2=-Q}$$

3–b)

- Le vecteur $f(u)$ a pour colonne de coordonnées $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (il suffit de faire le calcul). Il en résulte que $f(u)=0_E$, ou encore $u\in\text{Ker } f$.

Puisque $u\neq 0_E$, on conclut que $\text{Ker } f\neq\{0_E\}$, donc $\dim\text{Ker } f\geq 1$. Le théorème du rang donne alors $\dim\text{Im } f\leq 2$, soit $\boxed{\text{rang}(f)\leq 2}$

- La matrice M n'est pas nulle puisque au moins un des termes a,b,c ne l'est pas (on a $a^2+b^2+c^2=1$). Donc $1\leq\text{rang}(f)\leq 2$

Si $\text{rang}(f)=1$, cela veut dire que la matrice M est de rang 1, donc que les 3 colonnes sont proportionnelles. Les rôles de a,b,c sont symétriques, une des colonnes au moins n'est pas nulle, supposons que ce soit la première. Alors les deux autres lui sont proportionnelles : on aura donc simultanément $c=0,\ a=-b$ et $b=0,\ c=-a$, cela donne $a=b=c=0$, ce qui est impossible

Conclusion : le rang de f n'est pas égal à 1

$$\boxed{\text{rang}(f)=2 \text{ et par conséquent } \dim\text{Ker } f=1}$$

- On remarque que $f(i),f(j)$ et $f(k)$ sont orthogonaux à u (par exemple $f(i)=cj-bk$ et $u=ai+bj-ck$, donc $\langle f(i),u\rangle=bc-bc=0$), ce qui implique qu'ils appartiennent à $D^\perp$: on conclut que $\text{Im } f\subset D^\perp$.

$$\boxed{\text{Im } f\subset D^\perp \text{ et } \dim\text{Im } f=\dim D^\perp=2, \text{ donc } \text{Im } f=D^\perp}$$

$\dim\text{Ker } f=1$ et $u\neq 0_E\in\text{Ker } f$, donc $\boxed{\text{Ker } f=D}$

3–c)

$\forall v\in E,\ (f\circ p)(v)=f(p(v))=0_E$ car $p(v)\in D=\text{Ker } f$.

$$\boxed{f\circ p=0_{\mathcal{L}(E)}}$$

$\forall v\in E,\ f^2(v)=-q(v)$ puisque $M^2=-Q$, donc $v+f^2(v)=v-q(v)=p(v)$; cela veut dire $\text{Id}_E+f^2=p$.

D'autre part, $f+f^3=f\circ(\text{Id}+f^2)$, donc $\forall v\in E,\ (f+f^3)(v)=f((\text{Id}+f^2)(v))=f(p(v))=0_E$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La démonstration précédente prouve que } f+f^3=0_{\mathcal{L}(E)} \text{ ; cela veut}\\ \text{dire que la polynôme } X+X^3 \text{ (qui n'est pas le polynôme nul) est}\\ \text{annulateur de } f\end{array}}$$

3–d)

D'après le cours, on sait que les valeurs propres possibles de f sont les racines de $X+X^3$. Or ce polynôme n'admet dans $\mathbb{R}$ q'une seule racine, 0, puisque $X+X^3=X(1+X^2)$: $\text{spect}(f)\subset\{0\}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \neq 0 \Longrightarrow 0 \in \operatorname{spect}(f)$: $\boxed{\operatorname{spect}(f) = \{0\}}$

Si f était diagonalisable, sa matrice M serait semblable à une matrice diagonale sur la diagonale de laquelle il n'y aurait que des zéros, donc M serait semblable à la matrice nulle (0) ; il existerait une matrice de passage R telle que $M = R(0)R^{-1} = (0)$: M serait nulle ce qui est faux.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4–a)

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= (\mathrm{Id} + (\sin\theta) f + (1-\cos\theta) f^2) \circ (\mathrm{Id} + (\sin\theta') f + (1-\cos\theta') f^2) \\ &= \mathrm{Id} + (\sin\theta') f + (1-\cos\theta') f^2 + (\sin\theta) f + (\sin\theta \sin\theta') f^2 + \sin\theta(1-\cos\theta') f^3 \\ &\quad + (1-\cos\theta) f^2 + \sin\theta'(1-\cos\theta) f^3 + (1-\cos\theta')(1-\cos\theta) f^4 \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$; l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= \mathrm{Id} + (\sin\theta') f + (1-\cos\theta') f^2 + (\sin\theta) f + (\sin\theta \sin\theta') f^2 - \sin\theta(1-\cos\theta') f \\ &\quad + (1-\cos\theta) f^2 - \sin\theta'(1-\cos\theta) f - (1-\cos\theta')(1-\cos\theta) f^2 \\ &= \mathrm{Id} + (\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) f + (1 - (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')) f^2 \\ &= \mathrm{Id} + \sin(\theta+\theta') f + (1 - \cos(\theta+\theta')) f^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}}$$

4–b)

On remarque que $g_0 = \mathrm{Id}$, donc $\forall \theta \in \mathbb{R},\ g_\theta \circ g_{-\theta} = g_{-\theta} \circ g_\theta = g_0 = \mathrm{Id}$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{-\theta}}$$

EXERCICE II

1–a)

$f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$, donc $f_n(x) = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ si $x > 0$; on reconnaît dans $\dfrac{1}{n^2}$ le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$, donc la série de terme général $\dfrac{x}{n^2}$ est convergente et par la règle d'équivalence des séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum \dfrac{x}{n(n+x)}$ est convergente. Comme il est clair que la série de terme général 0 converge on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ est convergente}}$$

1–b)

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

2)

$\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$, donc $\forall x \geq 0,\ f_n'(x) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

$\boxed{\text{Par équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum f_n'(x) \text{ est convergente}}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3−a)

Sur $[x, x_0]$ ou $[x_0, x]$, la fonction φ est de classe C^∞, donc de classe C^2 et on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$

Comme t est entre x et x_0 (ou x_0 et x) et que l'un et l'autre sont supérieurs à n, on en déduit que $t \geq n$, donc $\varphi''(t) = |\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3}$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq |\frac{x - x_0)^2}{2}|\frac{2}{n^3}, \text{ d'où le résultat}$$

$$\boxed{\forall (x, x_0) \in (\ [n, +\infty[\ )^2,\ |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}}$$

3−b)

Soit $x \geq 0$ et $h \neq 0\ /\ x + h \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(n+x+h) + h\varphi'(n+x) \\ &= -\Big(\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi'(n+x)\Big) \end{aligned}$$

Puique $n + x + h$ et $x + n$ sont supérieurs ou égaux à n (vu que $x + h \in \mathbb{R}_+$), on peut appliquer le résultat précédent.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall h \neq 0\ /\ x + h \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}}$$

La série de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ est une série convergente car $3 > 1$ en tant que multiple de la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^3}$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$ est convergente, donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la série de terme général } f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x) \\ \text{est absolument convergente donc convergente}\end{array}}$$

3−c)

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h}) - \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x})\Big) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h}) - (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}) - \frac{h}{(n+x)^2}\Big) \\ &\quad \text{d'après les opérations sur les séries convergentes} \\ &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{h}{(n+x)^2}) \\ &= -\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)) \end{aligned}$$

La série $\sum(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))$ étant absolument convergente, on peut appliquer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue à la somme précédente.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right| &= \left|-\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{+\infty}(f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x))\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(x+h)-f_n(x)-hf_n'(x)| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^2}{n^3} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\leq \frac{1}{|h|}|h|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\end{aligned}$$

Posons alors $K=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, on a $K>0$ et il vient

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ \forall h\neq 0\ /\ x+h\geq 0,\ \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|\leq K|h|}$$

3−c)

Par encadrement, on a $\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|=0$ puisque $\lim_{h\to 0}K|h|=0$ et cela veut dire :

$$\forall x\geq 0,\ \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=G(x)$$

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ F \text{ est dérivable au point } x \text{ et } F'(x)=G(x)\ :\ F'=G}$$

4−a)

Posons, pour $t>0$, $h(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}$. On a $h'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+x)^2}$.

Or $x\geq 0$ et $t>0$ impliquent $0<t\leq t+x$, donc $0<\frac{1}{(t+x)^2}\leq\frac{1}{t^2}$ puisque la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; il s'ensuit que $\forall k\geq 1$, la fonction h est décroissante sur $[k,k+1]$, donc $\forall t\in[k,k+1],\ h(k+1)\leq h(t)\leq h(k)$

Intégrons ces inégalités entre k et $k+1$, il vient (puisque $k<k+1$) :

$$\boxed{h(k+1)\leq\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq h(k)}$$

Or $h(k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}=f_k(x)$ et bien-sûr $h(k+1)=f_{k+1}(x)$; l'encadrement précédent devient :

$$\boxed{\forall k\geq 1,\ f_{k+1}(x)\leq\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq f_k(x)} \quad \textbf{(1)}$$

En appliquant le résultat précédent, pour $k\geq 2$, entre $k-1$ et k, on obtient

$$\boxed{\forall k\geq 2,\ f_k(x)\leq\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)dt\leq f_{k-1}(x)} \quad \textbf{(2)}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4–b)

Dans l'encadrement **(1)** , on somme pour k variant entre 1 et n les inégalités de droite ; cela donne

$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ et en utilisant la relation de Chasles dans le terme de gauche de cette dernière inégalité, il vient

$$\int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Dans l'encadrement **(2)** , on somme pour k variant entre 2 et n les inégalités de gauche et on utilise la relation de Chasles ; cela donne

$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leq \int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt$; ajoutons aux deux termes $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt \qquad \textbf{(4)}$$

La comparaison de **(3)** et **(4)** donne le résulatat :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \forall k \geq 2,\ \int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_{1}^{n}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt} \qquad \textbf{(5)}$$

4–c)

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n+1}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x})dt &= \Big[\ln|t| - \ln|t+x|\Big]_1^{n+1}\\ &= \ln(n+1) - \ln(n+1+x) + \ln(1+x) = \ln\frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x)\end{aligned}$$

L'encadrement **(5)** s'écrit alors

$$\ln\frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln\frac{n}{n+x} + \ln(1+x)$$

$\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n+1+x} = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n}{n+x} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+1+x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+x} = 1$ et la fonction ln est continue au point 1. On conclut, puisque chaque terme de l'encadrement **(5)** a une limite que

$\lim_{n\to+\infty}\Big(\ln\frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x)\Big) \leq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{x}{x+1} + \ln\frac{n}{n+x} + \ln(1+x)\Big)$; ce qui donne

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x) = +\infty$, donc $\frac{x}{x+1} \underset{(x\to+\infty)}{=} \circ(\ln(1+x))$. Il en résulte que $(\frac{x}{x+1} + \ln(1+x)) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \ln(1+x)$

$F(x)$ est encadré entre deux termes équivalents, donc $\boxed{F(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \ln(1+x)}$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

III PROBLEME

3.1 Méthode de Monte-Carlo

3.1.1–a)

Une densité de U est f donnée par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0;1] \\ 1 & \text{si } t \in [0;1] \end{cases}$

3.1.1–b)

g est continue sur $[0;1]$, donc $|f \times g| = f \times |g|$ également . De plus la fonction $f \times |g|$ est nulle sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f \times g|(t)dt = \int_0^1 |f \times g|(t)dt = \int_0^1 f(t) \times |g|(t)dt$, intégrale qui existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

D'après le théorème du transfert, la variable $g(U)$ admet une espérance donnée, en plus, par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

La variable $g(U)$ admet une espérance et $E(g(U)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = J$

3.1.2–a)

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, la variable $g(U_i)$ possède une espérance égale à J d'après la question précédente. Donc S_n aussi et, par linéarité de l'espérance, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(g(U_i)) = J$.

De plus les variables $g(U_i)$ sont mutuellement indépendantes, par hypothèse elles admettent la même variance σ^2, donc S_n admet une variance et $V(S_n) = n\sigma^2$.

$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} > 0$. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à la variable $\frac{S_n}{n}$ (les conditions sont remplies).

$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2}$, soit encore $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Par encadrement, $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

cela veut dire : la suite $(\frac{S_n}{n})$ converge en probabilité vers J

3.1.2–b)

i) La variable S_n est la somme de n variables aléatoires de même loi, admettant une espérance et une variance non nulle, mutuellement indépendantes. **D'après le théorème de la limite centrée, la variable centrée réduite associée converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée, réduite.** La variable centrée, réduite associée à S_n est $S_n^* = \frac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma}$.

Or $\frac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Donc

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

La suite $\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

ii)

Si l'on considère que pour " n assez grand " S_n^* suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on peut dire que

$\forall t \geq 0,\ P\Big(-t \leq \dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t\Big) = 2\Phi(t) - 1$ d'après un résultat bien connu du cours

$$-t \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t \iff -t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{n} - J \leq t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{car } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0$$
$$\iff \frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La proposition précédente devient

$$\forall t \geq 0,\ P\Big(\frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) = 2\Phi(t) - 1$$

ou encore

$$\forall t \geq 0,\ P\Big(J \in [\frac{S_n}{n} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]\Big) = 2\Phi(t) - 1$$

L'intervalle cherché au niveau de confiance 0.95 est celui pour lequel $2\Phi(t) - 1 = 0.95$, ce qui donne $\Phi(t) = 0.975$, donc d'après le texte $t = 1.96$

L'intervalle de confiance cherché au niveau de confiance 0.975 est $[\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \dfrac{S_n}{n} + \dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}]$

3.1.3)

Application 3.1.3–a)

Posons $t = \sin u$ avec $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique $t \in [0;1]$; alors $dt = \cos du$; $\sqrt{1-t^2} = |\cos u| = \cos u$ puisque $u \in [0, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \cos u \geq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 u du \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)du \\ &= 2\Big[u + \frac{\sin 2u}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2(\frac{\pi}{2} - 0) \end{aligned}$$

$J = \pi$

3.1.3–b)

i) function G(t : real) : real ;

```
var z : real ;
begin
    z := 4*sqrt(1-sqr(t)) ;
    G := z ;
end ;
```


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ii)

Soit U une variable qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$, cette loi étant simulée par random et $g\ :\ t \mapsto 4\sqrt{1-t^2}$. Alors $g(U) = 4\sqrt{1-U^2}$.

D'après la question **3.1−b)** la variable $g(U)$ a une espérance qui vaut $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}dt = \pi$.

Si l'on envisage n variables aléatoires U_i qui suivent la loi uniforme, alors

D'après 3.1.2–a), $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ converge en probabilité vers $\pi = J$, d'où le programme

```
program ecricome2008 ;
BEGIN
randomize ;
readl(n) ;
J:=0;
for i:=1 to n do J:= G(random)+J ;
J:=J/n ;
writeln(' une valeur approchée de pi est '; J) ;
END.
```

3.2 Réduction de la variance par variables antithétiques

3.2.1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(1-U \leq x) = P(U \geq 1-x) = 1 - P(U < 1-x) = 1 - P(U \leq 1-x)$ car U est une variable à densité.

Si $x \leq 0$, alors $1-x \geq 1$, donc $P(U \leq 1-x) = 1$

Si $x \in [0;1]$, alors $1-x \in [0;1]$, donc $P(U \leq 1-x) = 1-x$ puisque U suit la loi uniforme sur $[0;1]$

Si $x > 1$, alors $1-x < 0$, donc $P(U \leq 1-x) = 0$.

Finalement $P(1-U \leq x) = \begin{cases} 1-1=0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)=x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-0=1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

U et $1-U$ suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, donc $g(U)$ et $g(1-U)$ ont la même espérance J. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = \frac{1}{2}\Big(E(g(U)) + E(g(1-U))\Big) = E(g(U)) = J$$

3.2.2–a)

$\forall (u,w) \in [0;1]^2,\ u \leq w \iff 1-u \geq 1-w$. Donc, dans ces conditions, $g(u)-g(w) \leq 0$ et $g(1-u)-g(1-w) \geq 0$, d'où $(g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0$. Par raison de la symétrie des rôles joués par u et w, on obtient le même résultat si $u \geq w$.

$$\forall (u,w) \in [0;1]^2, (g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leq 0$$

3.2.2–b)

La variable $Z = (g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))$ est négative ou nulle, son espérance aussi. Développons cette espérance $E(Z)$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\Big((g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))\Big) \\ &= E\Big(g(U)g(1-U)-g(U)g(1-W)-g(W)g(1-U)+g(W)g(1-W)\Big) \\ &= E\Big(g(U)g(1-U)\Big)-E\Big(g(U)g(1-W)\Big)-E\Big(g(W)g(1-U)\Big)+E\Big(g(W)g(1-W)\Big) \end{aligned}$$

Les variables U et W suivent la même loi (uniforme sur $[0;1]$), donc les variables $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ suivent aussi la même loi et elles admettent la même espérance.

Les variables U et W sont indépendantes, donc $g(U)$ et $g(1-W)$ aussi d'après le cours , de même $g(W)$ et $g(1-U)$.

Donc $E\Big(g(U)g(1-W)\Big) = E\Big(g(W)g(1-U)\Big) = \Big(E(g(U))\Big)^2$ car $U, W, 1-U$ et $1-W$ suivent la même la loi (l'uniforme sur $[0;1]$).

L'expression de $E(Z)$ devient $E(Z) = 2E\Big(g(U)g(1-W)\Big) - 2\Big(E(g(U))\Big)^2$.

$$\boxed{\text{Or } E(Z)\leq 0, \text{ donc } E\Big(g(U)g(1-W)\Big) = E\Big(g(U)\Big)\Big(g(1-W)\Big) \leq \Big(E(g(U))\Big)^2}$$

3.2.2–c)

- $E(g(U)^2) = \displaystyle\int_0^1 t^2 g(t)dt$, quantité qui existe car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[0;1]$; donc les variances et covariances utilisées par la suite existent.

$$\begin{aligned} V(Y) &= \tfrac{1}{4}\Big(V(g(U)) + V(g(1-U)) + 2\operatorname{cov}(g(U), g(1-U))\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U)) + \tfrac{1}{2}\operatorname{cov}(g(U), g(1-U)) \qquad \text{car } V(g(U)) = V(g(1-U)) \\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U)) + \tfrac{1}{2}\Big(E(g(U)g(1-U)) - E(g(U))E(g(1-U))\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}V(g(U)) + \tfrac{1}{2}\Big(\underbrace{E(g(U)g(1-U)) - (E(g(U)))^2}_{\leq 0}\Big) \end{aligned}$$

(d'après 3.2.2-b) appliqué $W = U$)

$$\boxed{V(Y) \leq \tfrac{1}{2}V(g(U))}$$

3.2.3)

$E(Y) = J$. Considérons une suite Y_i de variables indépendantes, de même loi que Y et posons, pour $n \geq 1$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Notons σ_1 la variance des variables Y_i

La variable $T_N^* = \dfrac{\frac{1}{N}T_N - J}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}}$ converge en loi vers une variable T qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Au seuil de confiance de 0.95, l'intervalle donné par $\frac{T_N}{N}$ est $[\frac{T_N}{N} - 1.96\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}; \frac{T_N}{N} + 1.96\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}]$; sa longueur l_N est $2 \times 1.96\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$ alors que $l_n = 2 \times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La question précédente indique que $(\sigma_1)^2 \leq \dfrac{(\sigma)^2}{2}$, donc $\sigma_1 \leq \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

On veut $l_N = l_n$, c'est-à-dire $2 \times 1.96\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = 2 \times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. , ou encore $\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, et pour finir $\sigma = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

or $\sigma \geq \sqrt{2}\sigma_1$, donc $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1 \geq \sqrt{2}\sigma_1$ puis $\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \geq \sqrt{2}\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}$. On obtient $\sqrt{N} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{N \leq \frac{n}{2}}$

3.3 Réduction de la variance par stratification

3.3.1 Etude d'une fonction de plusieurs variables

3.3.1.1

f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$ comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[^3$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{4x_1^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{x_2^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne dépend que de x_i, on en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ pour $i \neq j$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2x_1^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_2^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{9x_3^3}$

3.3.1.2

Par définition, la matrice hessienne de f au point $A = (a_1,a_2,a_3) \in (\ ]0,+\infty[\ )^3$ vaut

$$\nabla^2(f)(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$$

Soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, il est immédiat que

$$\boxed{{}^tH\nabla^2(f)(A)H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} > 0 \text{ car les } a_i \text{ sont } > 0 \text{ et } (h_1,h_2,h_3) \neq (0,0,0)}$$

3.3.1.3

$\forall A \in (\ [0,+\infty[\ )^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(A) \neq 0$, donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum sur }]0,+\infty[^3}$

3.3.1.4

On a donc, par exemple, $x_3 = 110 - x_1 - x_2$.

$f(x_1,x_2,110-x_1-x_2) = F(x_1,x_2) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9(110-x_1-x_2)}$

La contrainte implique $x_1 + x_2 > 110$ car $x_3 > 0$

F est de classe C^2 sur $\Delta = (\ ]0,+\infty[\ )^2 - \{(x_1,x_2)\ /\ x_1 + x_2 \leq 110\}$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = -\frac{1}{4x_1^2} + \frac{1}{9(110-x_1-x_2)^2}$

$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{9(110-x_1-x_2)^2}$

La couple (x_1,x_2) est un point critique si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0$,

ce qui donne le système $\begin{cases} 9(110-x_1-x_2)^2 = 4x_1^2 \\ 9(110-x_1-x_2)^2 = x_2^2 \end{cases}$

Ce système implique $x_2^2 = 4x_1^2$ soit $x_2 = 2x_1$ ou $x_2 = -2x_1$. Ce deuxième cas est à rejeter car x_1 et x_2 sont strictement positifs

Soit $x_2 = 2x_1$. Le système devient alors successivement

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$x_2 = 2x_1$ et $9(110 - x_1 - 2x_1)^2 = 4x_1^2$
$x_2 = 2x_1$ et $9(110 - x_1 - 2x_1)^2 - 4x_1^2 = 0$
$x_2 = 2x_1$ et $(3(110 - 3x_1) - 2x_1)(3(110 - 3x_1) + 2x_1) = 0$
$x_2 = 2x_1$ et $(330 - 11x_1)(330 - 7x_1) = 0$

- $x_1 = 30$; alors $x_2 = 60$ et $x_3 = 110 - 90 = 20$. Cette solution est acceptable.
- $x_1 = \frac{330}{7}$, alors $x_2 = \frac{660}{7}$ et $x_3 = 110 - \frac{990}{7} < 0$. Cette solution est à rejeter.

Sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$, il y a un unique point critique $A = (30, 60, 20)$

Notons $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$ et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. On sait que, pour tout vecteur $H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{P}$, $A + H \in \mathcal{C}$ et $\langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.

Remarque : Cela se vérifie sans problème car $\nabla f(A) = -\left(\frac{1}{4 \times 900}, \frac{1}{3600}, \frac{1}{9 \times 400}\right) \in \mathcal{P}^\perp$

- Il y a une autre façon de faire.

D'après le cours, les éventuels points critiques sous la contrainte C : $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ sont les points $A = (a_1, a_2, a_3) \in C$ tels que $\nabla f(A) \perp \mathcal{P}$, donc tels que $\nabla f(A)$ soit colinéaire au vecteur $(1, 1, 1)$.

D'où le système $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ -\frac{1}{4a_1^2} = -\frac{1}{a_2^2} = -\frac{1}{9a_3^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ a_2 = 2a_1, \ a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{3}a_1 \end{cases}$

car tous les nombres sont > 0.

On obtient $a_1 + 2a_1 + \frac{2}{3}a_1 = 110$ d'où les solutions : $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ et $a_3 = 20$.

- Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \exists \theta \in [0;1] \ / \ \forall H \in \mathcal{P}, \ f(A+H) &= f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \tfrac{1}{2}{}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \\ &= f(A) + \tfrac{1}{2}{}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \\ &\quad \text{car } \nabla f(A) \perp H, \text{ donc} \\ f(A+H) - f(A) &= \tfrac{1}{2}{}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \end{aligned}$$

Or on sait, d'après la question **3.1.2)** que ${}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H > 0$ dès que $H \neq 0$, donc

f possède au point $A = (30, 60, 20)$ un minimum strict sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$

3.3.2 Méthode de stratification

3.3.2.1)

La variable T prend ses valeurs dans $[0;1]$, donc le système $(T \in I_1)$, $(T \in I_2)$, $(T \in I_3)$ est un système complet d'événements. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\widetilde{U}) \leq x) = P(T \in I_1) P_{(T \in I_1)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + P(T \in I_2) P_{(T \in I_2)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + P(T \in I_3) P_{(T \in I_3)}(g(\widetilde{U}) \leq x)$$

Puisque T suit la loi uniforme sur $[0;1]$, $P(T \in I_1) = a$; de même $P(T \in I_2) = b - a$ et $P(T \in I_3) = 1 - b$. D'où le résultat

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(g(\widetilde{U}) \leq x) = a P_{(T \in I_1)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + (b-a) P_{(T \in I_2)}(g(\widetilde{U}) \leq x) + (1-c) P_{(T \in I_3)}(g(\widetilde{U}) \leq x)$$

D'après l'énoncé, si $T \in I_k$ pour $1 \leq k \leq 3$, alors $\widetilde{U} = U_k$, donc l'égalité précédente devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(g(\widetilde{U}) \leq x) = a P(g(U_1) \leq x) + (b-a) P(g(U_2) \leq x) + (1-c) P(g(U_3) \leq x)$$

Notons F_i la fonction de répartition de la variable $g(U_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $\widetilde{F}$ celle de $g(\widetilde{U})$. L'égalité précédente indique que : $\widetilde{F} = aF_1 + (b-a)F_2 + (1-b)F_3$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Les variables $g(U_i)$ sont des variables à densité, donc leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il en résulte que $\widetilde{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement aux points où les fonctions F_i ne sont pas dérivables.

$g(\widetilde{U})$ est une variable à densité.

Pour avoir une densité de $g(\widetilde{U})$ on dérivera $aF_1+(b-a)F_2+(1-b)F_3$ là où elles sont toutes les trois dérivables et ailleurs on prendra pour valeur de la densité 0 par exemple. Si l'on note D l'ensemble où l'une des trois fonctions F_1, F_2, F_3 n'est pas dérivable, on aura

$$f_{g(\widetilde{U})} = af_{g(U_1)}+(b-a)f_{g(U_2)}+(1-b)f_{g(U_3)}$$
sur $\mathbb{R}-D$ et 0 ailleurs

- Si $g=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, alors $g(\widetilde{U})=\widetilde{U}$. l'égalité précédente devient

$$f_{\widetilde{U}} = af_{U_1}+(b-a)f_{U_2}+(1-b)f_{U_3} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $x\notin[0,1]$, $f_{\widetilde{U}}=0$ car les trois densités f_{U_i} sont nulles.

Si $x\in[0,a[$, $f_{U_1}(x)=\dfrac{1}{a}$ et $f_{U_i}(x)=0$ pour $i=2$ et $i=3$, donc d'après **(1)** $f_{\widetilde{U}}(x)=\dfrac{a}{a}=1$.

Si $x\in[a,b[$, f_{u_1} et f_{u_3} sont nulles et $f_{u_2}(x)=\dfrac{1}{b-a}$, on a bien $f_{\widetilde{U}}(x)=1$.

De même pour $x\in[b,1]$.

Finalement $\forall x\in[0;1]$, $f_{\widetilde{U}}(x)=1$ et $f_{\widetilde{U}}(x)=0$ ailleurs :
on reconnaît une densité uniforme sur $[0;1]$

3.3.2.2)

Toutes les espérances existent d'après la question **3.1–a)** appliquée aux variables U_i et par linéarité de l'espérance

$$E(g(\widetilde{U}))=aE(g(U_1))+(b-a)E(g(U_2))+(1-b)E(g(U_3))$$

3.3.2.3)

Toutes les variables sont indépendantes, admettent espérances et variances, donc

$$\begin{aligned}V(Z) &= \frac{a^2}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}V(g(U_{1,i}))+\frac{(b-a)^2}{n_2^2}\sum_{j=1}^{n_2}V(g(U_{2,j}))+\frac{(1-b)^2}{n_3^2}\sum_{k=1}^{n_3}V(g(U_{3,k}))\\ &= \frac{a^2}{n_1^2}n_1V(g(U_1))+\frac{(b-a)^2}{n_2^2}n_2V(g(U_2))+\frac{(1-b)^2}{n_3^2}n_3V(g(U_3))\end{aligned}$$

car les variables $g(U_{1,i})$ suivent la même loi que U_1, les variables $g(U_{2,j})$ suivent la même loi que U_2 et les variables $g(U_{3,k})$ suivent la même loi que U_3.
On a donc l'égalité

$$V(Z)=\frac{a^2}{n_1}V(g(U_1))+\frac{(b-a)^2}{n_2}V(g(U_2))+\frac{(1-b)^2}{n_3}V(g(U_3))$$

3.3.2.4)

Avec les hypothèses de cette question, $V(Z)=\dfrac{1}{4n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{9n_3}=f(n_1,n_2,n_3)$

Reprenons l'expression de Z : $Z=\dfrac{a}{n_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}g(U_{1,i})+\dfrac{(b-a)}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}g(U_{2,j})+\dfrac{(1-b)}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3}g(U_{3,k})$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Toutes les variables $g(U_{1,i})$ ont la même espérance $J_1 = \frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt$ en vertu de la question **3.1−b)** appliquée à U_1 qui suit la loi uniforme sur $[0,a]$

De même, toutes les variables $g(U_{2,j})$ ont la même espérance $J_2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$ et toutes les variables $g(U_{3,k})$ ont la même espérance $J_3 = \frac{1}{1-b}\int_b^1 g(t)dt$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} E(Z) &= a\frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt + (b-a)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + (1-b)\frac{1}{1-b}\int_b^1 g(t)dt \\ &= \int_0^a g(t)dt + \int_a^b g(t)dt + \int_b^1 g(t)dt \end{aligned}$$

$$E(Z) = \int_0^1 g(t)dt = J$$

Z est un estimateur sans biais de J. Donc Z sera une approximation d'autant meilleure de J que le risque quadratique sera faible. Or ce risque est $V(Z)$. Comme $n_1+n_2+n_3 = 110$, on en conclut que

la meilleure estimation de J est obtenue pour $(n_1,n_2,n_3) = (30,60,20)$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021