

1. EXERCICE.

Soit \vec{u} un vecteur **unitaire** de \mathbb{R}^3 de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 . On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On note p le projecteur orthogonal sur la droite \mathcal{D} de vecteur directeur \vec{u} et q le projecteur orthogonal sur \mathcal{D}^\perp .

Id désigne l'application identité de \mathbb{R}^3 et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Que vaut $p + q$?
2. Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de \vec{u} .
Calculer alors $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.
En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base \mathcal{B} .
3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

a. Montrer que :

$$M^2 = -Q.$$

b. Calculer $f(\vec{u})$.

En déduire que $rg(f) \leq 2$.

Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de \mathcal{D} .

c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.

Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f .

d. Quelles sont les valeurs propres de f ?

f est-il diagonalisable ?

4. Pour tout réel θ , on définit l'endomorphisme g_θ par :

$$g_\theta = Id + (\sin \theta)f + (1 - \cos \theta)f^2$$

où $f^2 = f \circ f$.

a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

b. En déduire que, pour tout réel θ , g_θ est inversible et déterminer son inverse.

2. EXERCICE.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x , la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. *Etude de la dérivabilité de F .*

a. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}^{++} par :

$$\text{pour } t \in \mathbb{R}^{++}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\text{pour tout } (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

- b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.
- c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|.$$

d. En déduire que F est dérivable sur \mathbb{R}^+ et que $F' = G$.

4. *Recherche d'un équivalent en $+\infty$.*

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

a. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geq 2$,

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. PROBLEME.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, g une

fonction continue sur $[0, 1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t) dt$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n , si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

3.1. Méthode de Monte-Carlo.

1. a. Rappeler une densité de U .
b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J .
2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U .

On suppose que $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note pour tout n de \mathbb{N}^* , $S_n = \sum_{i=1}^n g(U_i)$.

- a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers J .

b. Recherche d'un intervalle de confiance pour J .

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{S_n - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On considère pour " n suffisamment grand " que $\frac{S_n - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance pour J , au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n .

3. Application :

a. A l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2} dt = \pi$.

b. i. Ecrire, en langage Pascal, une fonction **G**, de paramètre **t**, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

ii. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction **random** permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

En utilisant le résultat de la question 3.1.2. et la fonction **G**, les variables informatiques **J** de type **real** et **i,n** de type **integer** étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π .

```

begin
  randomize ;
  readln(n) ;
  J := 0 ;
  for i := 1 to n do ....
  .....
  writeln ( ' une valeur approchée de pi est ', J ) ;
end.

```

3.2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Reconnaître la loi de $1 - U$.

On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{1}{2} [g(U) + g(1 - U)]$. Que vaut $E(Y)$?

2. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

- a. Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0, 1]^2$,

$$(g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.$$

- b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de U .

Quel est le signe de $E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))]$?

En remarquant que $g(U)g(1 - U)$ et $g(W)g(1 - W)$ ont même espérance, en déduire que :

$$E[g(U)g(1 - U)] \leq (E[g(U)])^2.$$

On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

- c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \frac{1}{2} V(g(U))$.

3. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.

On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie 3.1 pour une valeur fixée de n .

Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

3.3. Réduction de la variance par stratification.

3.3.1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. On note :

$$\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right]_{1 \leq i, j \leq 3}$$

la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0.$$

3. f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

4. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.

En écrivant l'égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

3.3.2. Méthode de stratification.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1 = [0, a[, \quad I_2 = [a, b[, \quad I_3 = [b, 1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T , de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0, 1]$.

On définit la variable aléatoire \tilde{U} par $\tilde{U} = U_1 1_{[T \in I_1]} + U_2 1_{[T \in I_2]} + U_3 1_{[T \in I_3]}$ où 1_A désigne la fonction indicatrice d'un événement A . \tilde{U} est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x ,

$$P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b - a)P(g(U_2) \leq x) + (1 - b)P(g(U_3) \leq x).$$

En admettant que $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$, que l'on pourra noter

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$ et $f_{g(U_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g , que \tilde{U} suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Dédurre de ce qui précède que :

$$E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b - a)E(g(U_2)) + (1 - b)E(g(U_3)).$$

3. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3 . On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$ telles que :

- $U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1 ,
- $U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2 ,
- $U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3 ,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b - a) \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1 - b) \frac{1}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k}).$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b - a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1 - b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).$$

4. *Application numérique :*

On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b , on a

$$a^2 V(g(U_1)) = \frac{1}{4}, \quad (b - a)^2 V(g(U_2)) = 1, \quad (1 - b)^2 V(g(U_3)) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1 , n_2 points dans I_2 , n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?





ANNALES DE MATHEMATIQUES 2008

ERICOME VOIE 2008 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

Nous noterons $E = \mathbb{R}^3$.

1) _____

$$\forall z \in E, \exists!(v, w) \in D \times D^\perp / z = v + w.$$

Par définition, $v = p(z)$ et $w = q(z)$, donc $(p + q)(z) = z$.

$$p + q = \text{Id}$$

2) _____

$$\forall v \in E, v = p(v) + q(v).$$

Or $p(v) \in D = \text{vect}(u)$, il en résulte qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R} /$ $p(v) = \alpha u$ (1)

$$\text{On a donc } v = \alpha u + q(v).$$

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, on a :

$$\langle u, v \rangle = \langle u, \alpha u + q(v) \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \langle u, q(v) \rangle. \quad (2)$$

Par définition de q , $q(v) \in D^\perp$, donc $\langle u, q(v) \rangle = 0$. D'autre part, le vecteur u est normé, donc $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 1$.

L'égalité précédente (2) donne $\langle u, v \rangle = \alpha$ et l'égalité (1) donne $\forall v \in E, p(v) = \langle u, v \rangle u$

Remarque : En fait, nous venons de refaire une démonstration du cours.

D'après l'énoncé, $u = ai + bj + ck$, et puisque la base (i, j, k) est orthonormée, $a = \langle u, i \rangle$, $b = \langle u, j \rangle$ et $c = \langle u, k \rangle$.

D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} p(i) &= \langle u, i \rangle u = au = a^2i + abj + ack \\ p(j) &= \langle u, j \rangle u = bu = abi + b^2j + cbk \\ p(k) &= \langle u, k \rangle u = cu = aci + bcj + c^2k \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

3-a) _____

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b^2 + c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2 + c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Puisque le vecteur u est normé, on a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; il en résulte immédiatement que

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab & ac \\ ab & b^2 - 1 & ac \\ ac & bc & c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $M^2 = -Q$

3-b) _____

- Le vecteur $f(u)$ a pour colonne de coordonnées $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (il suffit de faire le calcul). Il en résulte que $f(u) = 0_E$, ou encore $u \in \text{Ker } f$.

Puisque $u \neq 0_E$, on conclut que $\text{Ker } f \neq \{0_E\}$, donc $\dim \text{Ker } f \geq 1$. Le théorème du

rang donne alors $\dim \text{Im } f \leq 2$, soit $\text{rang}(f) \leq 2$

- La matrice M n'est pas nulle puisque au moins un des termes a, b, c ne l'est pas (on a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$). Donc $1 \leq \text{rang}(f) \leq 2$

Si $\text{rang}(f) = 1$, cela veut dire que la matrice M est de rang 1, donc que les 3 colonnes sont proportionnelles. Les rôles de a, b, c sont symétriques, une des colonnes au moins n'est pas nulle, supposons que ce soit la première. Alors les deux autres lui sont proportionnelles : on aura donc simultanément $c = 0$, $a = -b$ et $b = 0$, $c = -a$, cela donne $a = b = c = 0$, ce qui est impossible

Conclusion : le rang de f n'est pas égal à 1

$\text{rang}(f) = 2$ et par conséquent $\dim \text{Ker } f = 1$

- On remarque que $f(i), f(j)$ et $f(k)$ sont orthogonaux à u (par exemple $f(i) = cj - bk$ et $u = ai + bj - ck$, donc $\langle f(i), u \rangle = bc - bc = 0$), ce qui implique qu'ils appartiennent à D^\perp : on conclut que $\text{Im } f \subset D^\perp$.

$\text{Im } f \subset D^\perp$ et $\dim \text{Im } f = \dim D^\perp = 2$, donc $\text{Im } f = D^\perp$

$\dim \text{Ker } f = 1$ et $u \neq 0_E \in \text{Ker } f$, donc $\text{Ker } f = D$

3-c) _____

$\forall v \in E, (f \circ p)(v) = f(p(v)) = 0_E$ car $p(v) \in D = \text{Ker } f$.

$f \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\forall v \in E, f^2(v) = -q(v)$ puisque $M^2 = -Q$, donc $v + f^2(v) = v - q(v) = p(v)$; cela veut dire $\text{Id}_E + f^2 = p$.

D'autre part, $f + f^3 = f \circ (\text{Id} + f^2)$, donc $\forall v \in E, (f + f^3)(v) = f((\text{Id} + f^2)(v)) = f(p(v)) = 0_E$.

La démonstration précédente prouve que $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$; cela veut dire que la polynôme $X + X^3$ (qui n'est pas le polynôme nul) est annulateur de f

3-d) _____

D'après le cours, on sait que les valeurs propres possibles de f sont les racines de $X + X^3$. Or ce polynôme n'admet dans \mathbb{R} qu'une seule racine, 0, puisque $X + X^3 = X(1 + X^2)$: $\text{spect}(f) \subset \{0\}$.

Or $\dim \text{Ker } f = 1 \neq 0 \implies 0 \in \text{spect}(f) : \boxed{\text{spect}(f) = \{0\}}$

Si f était diagonalisable, sa matrice M serait semblable à une matrice diagonale sur la diagonale de laquelle il n'y aurait que des zéros, donc M serait semblable à la matrice nulle (0) ; il existerait une matrice de passage R telle que $M = R(0)R^{-1} = (0) : M$ serait nulle ce qui est faux.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4-a)

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= (\text{Id} + (\sin \theta)f + (1 - \cos \theta)f^2) \circ (\text{Id} + (\sin \theta')f + (1 - \cos \theta')f^2) \\ &= \text{Id} + (\sin \theta')f + (1 - \cos \theta')f^2 + (\sin \theta)f + (\sin \theta \sin \theta')f^2 + \sin \theta(1 - \cos \theta')f^3 \\ &\quad + (1 - \cos \theta)f^2 + \sin \theta'(1 - \cos \theta)f^3 + (1 - \cos \theta')(1 - \cos \theta)f^4 \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $f^3 = -f$ et $f^4 = -f^2$; l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} g_\theta \circ g_{\theta'} &= \text{Id} + (\sin \theta')f + (1 - \cos \theta')f^2 + (\sin \theta)f + (\sin \theta \sin \theta')f^2 - \sin \theta(1 - \cos \theta')f \\ &\quad + (1 - \cos \theta)f^2 - \sin \theta'(1 - \cos \theta)f - (1 - \cos \theta')(1 - \cos \theta)f^2 \\ &= \text{Id} + (\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta)f + (1 - (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'))f^2 \\ &= \text{Id} + \sin(\theta + \theta')f + (1 - \cos(\theta + \theta'))f^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta + \theta'}}$$

4-b)

On remarque que $g_0 = \text{Id}$, donc $\forall \theta \in \mathbb{R}, g_\theta \circ g_{-\theta} = g_{-\theta} \circ g_\theta = g_0 = \text{Id}$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{-\theta}}$$

EXERCICE II

1-a)

$f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$, donc $f_n(x) = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{x}{n^2}$ si $x > 0$; on reconnaît dans $\frac{1}{n^2}$ le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$, donc la série de terme général $\frac{x}{n^2}$ est convergente et par la règle d'équivalence des séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum \frac{x}{n(n+x)}$ est convergente. Comme il est clair que la série de terme général 0 converge on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ est convergente}}$$

1-b)

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ F(1) &= 1 \end{aligned}$$

2)

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}, \text{ donc } \forall x \geq 0, f'_n(x) \underset{(n \rightarrow +\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

$$\boxed{\text{Par équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum f'_n(x) \text{ est convergente}}$$

3-a)

Sur $[x, x_0]$ ou $[x_0, x]$, la fonction φ est de classe C^∞ , donc de classe C^2 et on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.

$$\forall t > 0, \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} \text{ et } \varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$$

Comme t est entre x et x_0 (ou x_0 et x) et que l'un et l'autre sont supérieurs à n , on en déduit que $t \geq n$, donc $\varphi''(t) = |\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3}$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \frac{2}{n^3}, \text{ d'où le résultat}$$

$$\forall (x, x_0) \in ([n, +\infty[)^2, |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}$$

3-b)

Soit $x \geq 0$ et $h \neq 0 / x + h \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(n+x+h) + h\varphi'(n+x) \\ &= -(\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h\varphi'(n+x)) \end{aligned}$$

Puise $n+x+h$ et $x+n$ sont supérieurs ou égaux à n (vu que $x+h \in \mathbb{R}_+$), on peut appliquer le résultat précédent.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \neq 0 / x+h \in \mathbb{R}_+, |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}$$

La série de terme général $\frac{h^2}{n^3}$ est une série convergente car $3 > 1$ en tant que multiple de la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^3}$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$ est convergente, donc

la série de terme général $f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)$ est absolument convergente donc convergente

3-c)

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) &= \frac{1}{h} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) - \frac{h}{(n+x)^2} \right) \\ &\quad \text{d'après les opérations sur les séries convergentes} \\ &= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{h}{(n+x)^2} \right) \\ &= -\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)) \end{aligned}$$

La série $\sum (f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x))$ étant absolument convergente, on peut appliquer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue à la somme précédente.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| &= \left| -\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)| \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3} \quad \text{d'après la question précédente} \\
 &\leq \frac{1}{|h|} |h|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}
 \end{aligned}$$

Posons alors $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a $K > 0$ et il vient

$$\forall x \geq 0, \forall h \neq 0 / x+h \geq 0, \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$$

3-c)

Par encadrement, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| = 0$ puisque $\lim_{h \rightarrow 0} K|h| = 0$ et cela veut dire :

$$\forall x \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x)$$

$$\forall x \geq 0, F \text{ est dérivable au point } x \text{ et } F'(x) = G(x) : F' = G$$

4-a)

Posons, pour $t > 0$, $h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. On a $h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2}$.

Or $x \geq 0$ et $t > 0$ impliquent $0 < t \leq t+x$, donc $0 < \frac{1}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{t^2}$ puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

La fonction h est décroissante sur \mathbb{R}_+^* ; il s'ensuit que $\forall k \geq 1$, la fonction h est décroissante sur $[k, k+1]$, donc $\forall t \in [k, k+1]$, $h(k+1) \leq h(t) \leq h(k)$

Intégrons ces inégalités entre k et $k+1$, il vient (puisque $k < k+1$) :

$$h(k+1) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq h(k)$$

Or $h(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = f_k(x)$ et bien-sûr $h(k+1) = f_{k+1}(x)$; l'encadrement précédent devient :

$$\forall k \geq 1, f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x) \tag{1}$$

En appliquant le résultat précédent, pour $k \geq 2$, entre $k-1$ et k , on obtient

$$\forall k \geq 2, f_k(x) \leq \int_{k-1}^k \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_{k-1}(x) \tag{2}$$

4-b)

Dans l'encadrement (1), on somme pour k variant entre 1 et n les inégalités de droite ; cela donne

$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x)$ et en utilisant la relation de Chasles dans le terme de gauche de cette dernière inégalité, il vient

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (3)$$

Dans l'encadrement (2), on somme pour k variant entre 2 et n les inégalités de gauche et on utilise la relation de Chasles ; cela donne

$\sum_{k=2}^n f_k(x) \leq \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt$; ajoutons aux deux termes $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \quad (4)$$

La comparaison de (3) et (4) donne le résultat :

$$\forall x \geq 0, \forall k \geq 2, \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \quad (5)$$

4-c)

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt &= \left[\ln|t| - \ln|t+x| \right]_1^{n+1} \\ &= \ln(n+1) - \ln(n+1+x) + \ln(1+x) = \ln \frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x) \end{aligned}$$

L'encadrement (5) s'écrit alors

$$\ln \frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln \frac{n}{n+x} + \ln(1+x)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n+1}{n+1+x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{n}{n+x} = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+1+x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+x} = 1$ et la fonction \ln est continue au point 1. On conclut, puisque chaque terme de l'encadrement (5) a une limite que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n+1+x} + \ln(1+x) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} + \ln \frac{n}{n+x} + \ln(1+x) \right)$; ce qui donne

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$, donc $\frac{x}{x+1} \underset{(x \rightarrow +\infty)}{=} o(\ln(1+x))$. Il en résulte que

$$\left(\frac{x}{x+1} + \ln(1+x) \right) \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} \ln(1+x)$$

$F(x)$ est encadré entre deux termes équivalents, donc $F(x) \underset{(x \rightarrow +\infty)}{\sim} \ln(1+x)$

III PROBLEME

3.1 Méthode de Monte-Carlo

3.1.1-a)

Une densité de U est f donnée par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0; 1] \\ 1 & \text{si } t \in [0; 1] \end{cases}$

3.1.1-b)

g est continue sur $[0; 1]$, donc $|f \times g| = f \times |g|$ également. De plus la fonction $f \times |g|$ est nulle sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f \times g|(t) dt = \int_0^1 |f \times g|(t) dt = \int_0^1 f(t) \times |g|(t) dt$, intégrale qui existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0; 1]$.

D'après le théorème du transfert, la variable $g(U)$ admet une espérance donnée, en plus, par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

La variable $g(U)$ admet une espérance et $E(g(U)) = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)dt = J$

3.1.2-a)

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable $g(U_i)$ possède une espérance égale à J d'après la question précédente. Donc S_n aussi et, par linéarité de l'espérance, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(g(U_i)) = J$.

De plus les variables $g(U_i)$ sont mutuellement indépendantes, par hypothèse elles admettent la même variance σ^2 , donc S_n admet une variance et $V(S_n) = n\sigma^2$.

$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n} > 0$. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à la variable $\frac{S_n}{n}$ (les conditions sont remplies).

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \text{ soit encore } \forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Par encadrement, $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - J\right| \geq \varepsilon\right) = 0$
 cela veut dire : la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers J

3.1.2-b)

i) La variable S_n est la somme de n variables aléatoires de même loi, admettant une espérance et une variance non nulle, mutuellement indépendantes. **D'après le théorème de la limite centrée, la variable centrée réduite associée converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée, réduite.** La variable centrée, réduite associée à S_n est $S_n^* = \frac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma}$.

Or $\frac{S_n - nJ}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Donc

La suite $\frac{S_n - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

ii)

Si l'on considère que pour " n assez grand " S_n^* suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on peut dire que

$$\forall t \geq 0, P\left(-t \leq \frac{S_n - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t\right) = 2\Phi(t) - 1 \text{ d'après un résultat bien connu du cours}$$

$$\begin{aligned} -t \leq \frac{S_n - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq t &\iff -t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq S_n - J \leq t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{car } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0 \\ &\iff \frac{S_n}{n} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

La proposition précédente devient

$$\forall t \geq 0, P\left(\frac{S_n}{n} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) - 1$$

ou encore

$$\forall t \geq 0, P\left(J \in \left[\frac{S_n}{n} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\Phi(t) - 1$$

L'intervalle cherché au niveau de confiance 0.95 est celui pour lequel $2\Phi(t) - 1 = 0.95$, ce qui donne $\Phi(t) = 0.975$, donc d'après le texte $t = 1.96$

L'intervalle de confiance cherché au niveau de confiance 0.975 est $\left[\frac{S_n}{n} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

3.1.3)

Application 3.1.3-a)

Posons $t = \sin u$ avec $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ce qui implique $t \in [0; 1]$; alors $dt = \cos u du$;
 $\sqrt{1-t^2} = |\cos u| = \cos u$ puisque $u \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies \cos u \geq 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 u du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du \\ &= 2 \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \end{aligned}$$

$$J = \pi$$

3.1.3-b)

i) fonction $G(t : \text{real}) : \text{real}$;

var $z : \text{real}$;

begin

$z := 4 * \text{sqrt}(1 - \text{sqr}(t))$;

$G := z$;

end ;

ii)

Soit U une variable qui suit la loi uniforme sur $[0;1]$, cette loi étant simulée par random et $g : t \mapsto 4\sqrt{1-t^2}$. Alors $g(U) = 4\sqrt{1-U^2}$.

D'après la question 3.1-b) la variable $g(U)$ a une espérance qui vaut $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}dt = \pi$.

Si l'on envisage n variables aléatoires U_i qui suivent la loi uniforme, alors

D'après 3.1.2-a), $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$ converge en probabilité vers $\pi = J$, d'où le programme

```

program ecricome2008 ;
BEGIN
randomize ;
readl(n) ;
J:=0;
for i:=1 to n do J:= G(random)+J ;
J:=J/n ;
writeln(' une valeur approchée de pi est ', J) ;
END.
    
```

3.2 Réduction de la variance par variables antithétiques

3.2.1)

$\forall x \in \mathbb{R}, P(1-U \leq x) = P(U \geq 1-x) = 1 - P(U < 1-x) = 1 - P(U \leq 1-x)$ car U est une variable à densité.

Si $x \leq 0$, alors $1-x \geq 1$, donc $P(U \leq 1-x) = 1$

Si $x \in [0;1]$, alors $1-x \in [0;1]$, donc $P(U \leq 1-x) = 1-x$ puisque U suit la loi uniforme sur $[0;1]$

Si $x > 1$, alors $1-x < 0$, donc $P(U \leq 1-x) = 0$.

Finalement
$$P(1-U \leq x) = \begin{cases} 1-1=0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-(1-x)=x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-0=1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

U et $1-U$ suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, donc $g(U)$ et $g(1-U)$ ont la même espérance J . Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = \frac{1}{2} (E(g(U)) + E(g(1-U))) = E(g(U)) = J$$

3.2.2-a)

$\forall (u, w) \in [0;1]^2, u \leq w \iff 1-u \geq 1-w$. Donc, dans ces conditions, $g(u) - g(w) \leq 0$ et $g(1-u) - g(1-w) \geq 0$, d'où $(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0$. Par raison de la symétrie des rôles joués par u et w , on obtient le même résultat si $u \geq w$.

$$\forall (u, w) \in [0;1]^2, (g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w)) \leq 0$$

3.2.2-b)

La variable $Z = (g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))$ est négative ou nulle, son espérance aussi. Développons cette espérance $E(Z)$.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left((g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))\right) \\
&= E\left(g(U)g(1 - U) - g(U)g(1 - W) - g(W)g(1 - U) + g(W)g(1 - W)\right) \\
&= E\left(g(U)g(1 - U)\right) - E\left(g(U)g(1 - W)\right) - E\left(g(W)g(1 - U)\right) + E\left(g(W)g(1 - W)\right)
\end{aligned}$$

Les variables U et W suivent la même loi (uniforme sur $[0; 1]$), donc les variables $g(U)g(1 - U)$ et $g(W)g(1 - W)$ suivent aussi la même loi et elles admettent la même espérance.

Les variables U et W sont indépendantes, donc $g(U)$ et $g(1 - W)$ aussi d'après le cours, de même $g(W)$ et $g(1 - U)$.

Donc $E\left(g(U)g(1 - W)\right) = E\left(g(W)g(1 - U)\right) = \left(E(g(U))\right)^2$ car $U, W, 1 - U$ et $1 - W$ suivent la même la loi (l'uniforme sur $[0; 1]$).

L'expression de $E(Z)$ devient $E(Z) = 2E\left(g(U)g(1 - W)\right) - 2\left(E(g(U))\right)^2$.

Or $E(Z) \leq 0$, donc $E\left(g(U)g(1 - W)\right) = E\left(g(U)\right)\left(g(1 - W)\right) \leq \left(E(g(U))\right)^2$

3.2.2-c)

• $E(g(U)^2) = \int_0^1 t^2 g(t) dt$, quantité qui existe car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[0; 1]$; donc les variances et covariances utilisées par la suite existent.

$$\begin{aligned}
V(Y) &= \frac{1}{4}\left(V(g(U)) + V(g(1 - U)) + 2\text{cov}(g(U), g(1 - U))\right) \\
&= \frac{1}{2}V(g(U)) + \frac{1}{2}\text{cov}(g(U), g(1 - U)) \quad \text{car } V(g(U)) = V(g(1 - U)) \\
&= \frac{1}{2}V(g(U)) + \frac{1}{2}\left(E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U))E(g(1 - U))\right) \\
&= \frac{1}{2}V(g(U)) + \frac{1}{2}\left(\underbrace{E(g(U)g(1 - U)) - (E(g(U)))^2}_{\leq 0}\right)
\end{aligned}$$

(d'après 3.2.2-b) appliqué $W = U$)

$$V(Y) \leq \frac{1}{2}V(g(U))$$

3.2.3)

$E(Y) = J$. Considérons une suite Y_i de variables indépendantes, de même loi que Y et posons, pour $n \geq 1$, $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Notons σ_1 la variance des variables Y_i

La variable $T_N^* = \frac{\frac{1}{N}T_N - J}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}}$ converge en loi vers une variable T qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Au seuil de confiance de 0.95, l'intervalle donné par $\frac{T_N}{N}$ est $[\frac{T_N}{N} - 1.96 \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}; \frac{T_N}{N} + 1.96 \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}]$; sa longueur l_N est $2 \times 1.96 \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$ alors que $l_n = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La question précédente indique que $(\sigma_1)^2 \leq \frac{(\sigma)^2}{2}$, donc $\sigma_1 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

On veut $l_N = l_n$, c'est-à-dire $2 \times 1.96 \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ou encore $\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, et pour finir $\sigma = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1$.

or $\sigma \geq \sqrt{2}\sigma_1$, donc $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N}}\sigma_1 \geq \sqrt{2}\sigma_1$ puis $\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \geq \sqrt{2}\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}$. On obtient $\sqrt{N} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ soit $N \leq \frac{n}{2}$

3.3 Réduction de la variance par stratification

3.3.1 Etude d'une fonction de plusieurs variables

3.3.1.1

f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[^3$ comme somme de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4x_1^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne dépend que de x_i , on en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ pour $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_2^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{9x_3^3}$$

3.3.1.2

Par définition, la matrice hessienne de f au point $A = (a_1, a_2, a_3) \in (]0, +\infty[)^3$ vaut

$$\nabla^2(f)(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$$

Soit $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, il est immédiat que

$${}^t H \nabla^2(f)(A) H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3} > 0 \text{ car les } a_i \text{ sont } > 0 \text{ et } (h_1, h_2, h_3) \neq (0, 0, 0)$$

3.3.1.3

$\forall A \in (]0, +\infty[^3, \overrightarrow{\text{grad}}(f)(A) \neq 0$, donc f n'a pas d'extremum sur $]0, +\infty[^3$

3.3.1.4

On a donc, par exemple, $x_3 = 110 - x_1 - x_2$.

$$f(x_1, x_2, 110 - x_1 - x_2) = F(x_1, x_2) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9(110 - x_1 - x_2)}$$

La contrainte implique $x_1 + x_2 > 110$ car $x_3 > 0$

F est de classe C^2 sur $\Delta = (]0, +\infty[^2 - \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 \leq 110\})$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{1}{4x_1^2} + \frac{1}{9(110 - x_1 - x_2)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{9(110 - x_1 - x_2)^2}$$

La couple (x_1, x_2) est un point critique si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$,

ce qui donne le système $\begin{cases} 9(110 - x_1 - x_2)^2 = 4x_1^2 \\ 9(110 - x_1 - x_2)^2 = x_2^2 \end{cases}$

Ce système implique $x_2^2 = 4x_1^2$ soit $x_2 = 2x_1$ ou $x_2 = -2x_1$. Ce deuxième cas est à rejeter car x_1 et x_2 sont strictement positifs

Soit $x_2 = 2x_1$. Le système devient alors successivement

$$\begin{aligned} x_2 = 2x_1 & \text{ et } 9(110 - x_1 - 2x_1)^2 = 4x_1^2 \\ x_2 = 2x_1 & \text{ et } 9(110 - x_1 - 2x_1)^2 - 4x_1^2 = 0 \\ x_2 = 2x_1 & \text{ et } (3(110 - 3x_1) - 2x_1)(3(110 - 3x_1) + 2x_1) = 0 \\ x_2 = 2x_1 & \text{ et } (330 - 11x_1)(330 - 7x_1) = 0 \end{aligned}$$

- $x_1 = 30$; alors $x_2 = 60$ et $x_3 = 110 - 90 = 20$. Cette solution est acceptable.
- $x_1 = \frac{330}{7}$, alors $x_2 = \frac{660}{7}$ et $x_3 = 110 - \frac{990}{7} < 0$. Cette solution est à rejeter.

Sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$, il y a un unique point critique $A = (30, 60, 20)$

Notons $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$ et \mathcal{P} le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. On sait que, pour tout vecteur $H = (h_1, h_2, h_3) \in \mathcal{P}$, $A + H \in \mathcal{C}$ et $\langle \nabla f(A), H \rangle = 0$.

Remarque : Cela se vérifie sans problème car $\nabla f(A) = -\left(\frac{1}{4 \times 900}, \frac{1}{3600}, \frac{1}{9 \times 400}\right) \in \mathcal{P}^\perp$

- Il y a une autre façon de faire.

D'après le cours, les éventuels points critiques sous la contrainte $C : x_1 + x_2 + x_3 = 110$ sont les points $A = (a_1, a_2, a_3) \in C$ tels que $\nabla f(A) \perp \mathcal{P}$, donc tels que $\nabla f(A)$ soit colinéaire au vecteur $(1, 1, 1)$.

$$\text{D'où le système } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ -\frac{1}{4a_1^2} = -\frac{1}{a_2^2} = -\frac{1}{9a_3^2} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 110 \\ a_2 = 2a_1, a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{3}a_1 \end{cases}$$

car tous les nombres sont > 0 .

On obtient $a_1 + 2a_1 + \frac{2}{3}a_1 = 110$ d'où les solutions : $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ et $a_3 = 20$.

- Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \exists \theta \in [0; 1] / \forall H \in \mathcal{P}, f(A + H) &= f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} {}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \\ &= f(A) + \frac{1}{2} {}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \\ &\quad \text{car } \nabla f(A) \perp H, \text{ donc} \\ f(A + H) - f(A) &= \frac{1}{2} {}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H \end{aligned}$$

Or on sait, d'après la question 3.1.2) que ${}^t H \nabla^2(f)(A + \theta H) H > 0$ dès que $H \neq 0$, donc

f possède au point $A = (30, 60, 20)$ un minimum strict sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$

3.3.2 Méthode de stratification

3.3.2.1)

La variable T prend ses valeurs dans $[0; 1]$, donc le système $(T \in I_1)$, $(T \in I_2)$, $(T \in I_3)$ est un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) &= P(T \in I_1)P_{(T \in I_1)}(g(\tilde{U}) \leq x) + P(T \in I_2)P_{(T \in I_2)}(g(\tilde{U}) \leq x) + \\ &\quad P(T \in I_3)P_{(T \in I_3)}(g(\tilde{U}) \leq x) \end{aligned}$$

Puisque T suit la loi uniforme sur $[0; 1]$, $P(T \in I_1) = a$; de même $P(T \in I_2) = b - a$ et $P(T \in I_3) = 1 - b$. D'où le résultat

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP_{(T \in I_1)}(g(\tilde{U}) \leq x) + (b - a)P_{(T \in I_2)}(g(\tilde{U}) \leq x) + (1 - b)P_{(T \in I_3)}(g(\tilde{U}) \leq x)$$

D'après l'énoncé, si $T \in I_k$ pour $1 \leq k \leq 3$, alors $\tilde{U} = U_k$, donc l'égalité précédente devient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = aP(g(U_1) \leq x) + (b - a)P(g(U_2) \leq x) + (1 - b)P(g(U_3) \leq x)$$

Notons F_i la fonction de répartition de la variable $g(U_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$ et \tilde{F} celle de $g(\tilde{U})$. L'égalité précédente indique que : $\tilde{F} = aF_1 + (b - a)F_2 + (1 - b)F_3$

Les variables $g(U_i)$ sont des variables à densité, donc leurs fonctions de répartition sont continues sur \mathbb{R} et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il en résulte que \tilde{F} est continue sur \mathbb{R} en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement aux points où les fonctions F_i ne sont pas dérivables.

$g(\tilde{U})$ est une variable à densité.

Pour avoir une densité de $g(\tilde{U})$ on dérivera $aF_1 + (b - a)F_2 + (1 - b)F_3$ là où elles sont toutes les trois dérivables et ailleurs on prendra pour valeur de la densité 0 par exemple. Si l'on note D l'ensemble où l'une des trois fonctions F_1, F_2, F_3 n'est pas dérivable, on aura

$$f_{g(\tilde{U})} = af_{g(U_1)} + (b - a)f_{g(U_2)} + (1 - b)f_{g(U_3)}$$

sur $\mathbb{R} - D$ et 0 ailleurs

- Si $g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, alors $g(\tilde{U}) = \tilde{U}$. l'égalité précédente devient

$$f_{\tilde{U}} = af_{U_1} + (b - a)f_{U_2} + (1 - b)f_{U_3} \tag{1}$$

Si $x \notin [0, 1]$, $f_{\tilde{U}} = 0$ car les trois densités f_{U_i} sont nulles.

Si $x \in [0, a[$, $f_{U_1}(x) = \frac{1}{a}$ et $f_{U_i}(x) = 0$ pour $i = 2$ et $i = 3$, donc d'après (1) $f_{\tilde{U}}(x) = \frac{a}{a} = 1$.

Si $x \in [a, b[$, f_{U_1} et f_{U_3} sont nulles et $f_{U_2}(x) = \frac{1}{b - a}$, on a bien $f_{\tilde{U}}(x) = 1$.

De même pour $x \in [b, 1]$.

Enfinement $\forall x \in [0; 1]$, $f_{\tilde{U}}(x) = 1$ et $f_{\tilde{U}}(x) = 0$ ailleurs :

on reconnaît une densité uniforme sur $[0; 1]$

3.3.2.2)

Toutes les espérances existent d'après la question 3.1-a) appliquée aux variables U_i et par linéarité de l'espérance

$$E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b - a)E(g(U_2)) + (1 - b)E(g(U_3))$$

3.3.2.3)

Toutes les variables sont indépendantes, admettent espérances et variances, donc

$$\begin{aligned} V(Z) &= \frac{a^2}{n_1^2} \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + \frac{(b - a)^2}{n_2^2} \sum_{j=1}^{n_2} V(g(U_{2,j})) + \frac{(1 - b)^2}{n_3^2} \sum_{k=1}^{n_3} V(g(U_{3,k})) \\ &= \frac{a^2}{n_1^2} n_1 V(g(U_1)) + \frac{(b - a)^2}{n_2^2} n_2 V(g(U_2)) + \frac{(1 - b)^2}{n_3^2} n_3 V(g(U_3)) \end{aligned}$$

car les variables $g(U_{1,i})$ suivent la même loi que U_1 , les variables $g(U_{2,j})$ suivent la même loi que U_2 et les variables $g(U_{3,k})$ suivent la même loi que U_3 .

On a donc l'égalité

$$V(Z) = \frac{a^2}{n_1} V(g(U_1)) + \frac{(b - a)^2}{n_2} V(g(U_2)) + \frac{(1 - b)^2}{n_3} V(g(U_3))$$

3.3.2.4)

Avec les hypothèses de cette question, $V(Z) = \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3} = f(n_1, n_2, n_3)$

Reprenons l'expression de Z : $Z = \frac{a}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + \frac{(b - a)}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + \frac{(1 - b)}{n_3} \sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k})$.

Toutes les variables $g(U_{1,i})$ ont la même espérance $J_1 = \frac{1}{a} \int_0^a g(t)dt$ en vertu de la question **3.1–b)** appliquée à U_1 qui suit la loi uniforme sur $[0, a]$

De même, toutes les variables $g(U_{2,j})$ ont la même espérance $J_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt$ et

toutes les variables $g(U_{3,k})$ ont la même espérance $J_3 = \frac{1}{1-b} \int_b^1 g(t)dt$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} E(Z) &= a \frac{1}{a} \int_0^a g(t)dt + (b-a) \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt + (1-b) \frac{1}{1-b} \int_b^1 g(t)dt \\ &= \int_0^a g(t)dt + \int_a^b g(t)dt + \int_b^1 g(t)dt \\ &E(Z) = \int_0^1 g(t)dt = J \end{aligned}$$

Z est un estimateur sans biais de J . Donc Z sera une approximation d'autant meilleure de J que le risque quadratique sera faible. Or ce risque est $V(Z)$. Comme $n_1 + n_2 + n_3 = 110$, on en conclut que

la meilleure estimation de J est obtenue pour $(n_1, n_2, n_3) = (30, 60, 20)$