ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−25

Pour x réel on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les variations de f.

2) a) Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en $+\infty$.

3) a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction exp, montrer que

$$\forall u > 0,\ |\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq \frac{u^3}{6}\exp(u).$$

En déduire que

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall t \in [x; 3x],\ \left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Montrer alors que :

$$\left|f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c) En déduire que l'on peut écrire au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3 + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0.$$

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\varphi\ :\ t \longmapsto \exp\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue. En effet,

$w\ :\ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ w$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc φ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ des primitives. Soit Φ l'une d'entre elles.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \Phi(3x) - \Phi(x)$.

$x \longmapsto \Phi(3x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \longmapsto 3x$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 3\Phi'(3x) - \Phi'(x) = 3\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- Signe de $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp\frac{1}{\sqrt{x}}\\
&= \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}\left(3 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\right)\\
&= \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}\underbrace{\left(3 - \exp\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right)\right)}_{v(x)}
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $v(x) = 3 - \exp\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right)$.

$$\begin{aligned}
v(x) \geq 0 &\iff \exp\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right) \leq 3\\
&\iff 0 < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \leq \ln 3 \quad \textbf{(car } \ln \textbf{ est strictement croissante)}\\
&\iff \sqrt{3x} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} > 0\\
&\qquad \textbf{(car } \sqrt{3x} \textbf{ et } \ln 3 \textbf{ sont strictement positifs)}\\
&\iff 3x \geq \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2 > 0\\
&\qquad \textbf{(inégalité entre nombres strictement positifs)}\\
&\iff x \geq \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2 > 0 \quad \textbf{(on a divisé par } 3 > 0).
\end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variations suivant où $\alpha = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

QUESTION−2

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \longmapsto \exp\frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante. Donc elle est décroissante sur $[x, 3x], \forall x > 0$.

On a $\forall t \in [x, 3x],\ \exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Intégrons cet encadrement entre x et $3x$ (**les bornes sont dans l'ordre croissant car** $x > 0$). On obtient :

$\int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}dt \leq \int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{x}}dt$, soit

$$\boxed{2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x\exp\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \textbf{(1)}}$$

a)

Déterminons la limite de f en 0^++.

Posons $h(x) = x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}}$.

$h(x)$ est strictement positif, on peut en prendre le $\ln$.

$\ln h(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3x}}\left(\sqrt{3}\sqrt{x}\ln x + 1\right)$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +} \sqrt{x}\ln x = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to +} (\sqrt{3}\sqrt{x}\ln x + 1) = 1$, et comme $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$, on conclut que

$\lim\limits_{x\to +} \ln h(x) = +\infty$. Or $h(x) = \exp\ln h(x)$, donc

$$\lim_{x\to +} h(x) = +\infty.$$

$$\boxed{2h(x) \leq f(x) \text{ et } \lim_{x\to +} h(x) = +\infty \text{ implique } \lim_{x\to +} f(x) = +\infty.}$$

b)

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

Reprenons l'encadrement $2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x\exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$ car $\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \to 1$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Divisons l'encadrement par $2x > 0$, on obtient

$\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{f(x)}{2x} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\frac{1}{\sqrt{3x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \exp\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Le théorème d'encadrement permet de conclure que } \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{2x} = 1. \\ \text{Donc } f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x.\end{array}}$$

QUESTION–3

a)

- La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$; on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre sur n'importe quel intervalle fermé.

Appliquons Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur l'intervalle $[0, u]$ où $u \in \mathbb{R}_+^*$.

$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq M\frac{u^3}{6}$ où M est un majorant de la dérivée troisième de exp sur $[0; u]$, donc M est un majorant de exp sur $[0; u]$. On peut prendre pour M le maximum de exp sur $[0; u]$, soit $M = \exp(u)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient

$$\boxed{|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq \frac{u^3}{6}\exp(u).}$$

- Soit $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t \in [x; 3x]$. On a alors

$\left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$

Or $0 < x \leq t \leq 3x$, donc **puisque la fonction racine carrée est croissante** on obtient l'encadrement

$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{3x}.$

On peut passer aux inverses car il s'agit de **nombres strictement positifs** :

$\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc

$\forall t \in [x; 3x],\ \exp\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$ du fait de la croissance de exp.

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient :

$$\boxed{\forall t \in [x; 3x],\ \left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \left(\frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

b)

Intégrons entre x et $3x$; comme **les bornes sont dans l'ordre croissant**, il vient

$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{3x}\frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}dt,$ soit

$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \frac{1}{3}\exp\frac{1}{\sqrt{x}}[-\frac{1}{\sqrt{t}}]_x^{3x}$. Ce qui donne

$$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Or on sait, puisque $x \leq 3x$, que

$$\left|\int_x^{3x}\left(\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right)dt\right| \leq \int_x^{3x}|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}|dt. \qquad \textbf{(2)}$$

On a donc finalement, en comparant **(1)** et **(2)**,

$\left|\int_x^{3x}\left(\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right)dt\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$

Le premier membre se calcule et on obtient

$$\boxed{\left|f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

c)

Posons $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3$.

L'encadrement précédent donne $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc

le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

L'égalité $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3$ est équivalente à

$$\boxed{f(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3 + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.}$$

QUESTION−4

a)

La fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$\forall x > 0,\ g(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3$ est continue, dérivable, strictement croissante.

On a facilement le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
g			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$\frac{1}{2}\ln 2$		

$f(x) - g(x) = \varepsilon(x)$, donc les courbes représentatives de f et de g sont asymptotes en $+\infty$.