



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-25

Pour x réel on pose $f(x) = \int_x^{3x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les variations de f .
- 2) a) Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en $+\infty$.
- 3) a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction \exp , montrer que

$$\forall u > 0, \left| \exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

En déduire que

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall t \in [x; 3x], \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- b) Montrer alors que :

$$\left| f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3 \right| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- c) En déduire que l'on peut écrire au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3 + \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION-1

Sur \mathbb{R}_+^* , la fonction $\varphi : t \mapsto \exp \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue. En effet,

$w : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et \exp est continue sur \mathbb{R} , donc $\exp \circ w$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Donc φ admet sur \mathbb{R}_+^* des primitives. Soit Φ l'une d'entre elles.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \Phi(3x) - \Phi(x)$.

$x \mapsto \Phi(3x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* car $x \mapsto 3x$ est dérivable de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* et Φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 3\Phi'(3x) - \Phi'(x) = 3 \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- Signe de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \left(3 - \exp \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \right) \\ &= \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \underbrace{\left(3 - \exp \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right) \right)}_{v(x)} \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $v(x) = 3 - \exp \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right)$.

$$\begin{aligned} v(x) \geq 0 &\iff \exp \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \right) \leq 3 \\ &\iff 0 < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \leq \ln 3 \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\ &\iff \sqrt{3x} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} > 0 \\ &\quad (\text{car } \sqrt{3x} \text{ et } \ln 3 \text{ sont strictement positifs}) \\ &\iff 3x \geq \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2 > 0 \\ &\quad (\text{inégalité entre nombres strictement positifs}) \\ &\iff x \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2 > 0 \quad (\text{on a divisé par } 3 > 0). \end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variations suivant où $\alpha = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} \right)^2$:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

QUESTION-2

Sur \mathbb{R}_+^* , la fonction $t \mapsto \exp \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante. Donc elle est décroissante sur $[x, 3x], \forall x > 0$.

On a $\forall t \in [x, 3x], \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Intégrons cet encadrement entre x et $3x$ (les bornes sont dans l'ordre croissant car $x > 0$). On obtient :

$\int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} dt \leq \int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \int_x^{3x} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} dt$, soit

$$2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

a)

Déterminons la limite de f en 0^+ .

Posons $h(x) = x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}}$.

$h(x)$ est strictement positif, on peut en prendre le ln.

$$\ln h(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3x}} (\sqrt{3}\sqrt{x} \ln x + 1).$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$, donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{3}\sqrt{x} \ln x + 1) = 1$, et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$, on conclut que

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln h(x) = +\infty$. Or $h(x) = \exp \ln h(x)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty.$$

$$2h(x) \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty \text{ implique } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

b)

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

Reprenons l'encadrement $2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$ car $\exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \rightarrow 1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Divisons l'encadrement par $2x > 0$, on obtient

$$\exp \frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{f(x)}{2x} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{1}{\sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x} = 1$.

$$\text{Donc } f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x.$$

QUESTION-3

a)

• La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^∞ ; on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre sur n'importe quel intervalle fermé.

Appliquons Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur l'intervalle $[0, u]$ où $u \in \mathbb{R}_+^*$.

$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq M \frac{u^3}{6}$ où M est un majorant de la dérivée troisième de \exp sur $[0; u]$, donc M est un majorant de \exp sur $[0; u]$. On peut prendre pour M le maximum de \exp sur $[0; u]$, soit $M = \exp(u)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient

$$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

• Soit $u = \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t \in [x; 3x]$. On a alors

$$\left| \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or $0 < x \leq t \leq 3x$, donc **puisque la fonction racine carrée est croissante** on obtient l'encadrement

$$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{3x}.$$

On peut passer aux inverses car il s'agit de **nombres strictement positifs** :

$$\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ donc}$$

$\forall t \in [x; 3x]$, $\exp \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}}$ du fait de la croissance de \exp .

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient :

$$\forall t \in [x; 3x], \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| \leq \left(\frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b)

Intégrons entre x et $3x$; comme **les bornes sont dans l'ordre croissant**, il vient

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{3x} \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}} dt, \text{ soit}$$

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \frac{1}{3} \exp \frac{1}{\sqrt{x}} \left[-\frac{1}{\sqrt{t}} \right]_x^{3x}. \text{ Ce qui donne}$$

$$\int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (1)$$

Or on sait, puisque $x \leq 3x$, que

$$\left| \int_x^{3x} \left(\exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right) dt \right| \leq \int_x^{3x} \left| \exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right| dt. \quad (2)$$

On a donc finalement, en comparant (1) et (2),

$$\left| \int_x^{3x} \left(\exp \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \right) dt \right| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le premier membre se calcule et on obtient

$$\left| f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3 \right| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c)

$$\text{Posons } \varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\text{L'encadrement précédent donne } |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right) \exp \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \text{ donc}$$

le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

L'égalité $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln 3$ est équivalente à

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3 + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

QUESTION-4

a)

La fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par

$\forall x > 0, g(x) = 2x + 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 3$ est continue, dérivable, strictement croissante.

On a facilement le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
g	$\frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$
\nearrow		

$f(x) - g(x) = \varepsilon(x)$, donc les courbes représentatives de f et de g sont asymptotes en $+\infty$.