ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–25

Pour x réel on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier les variations de f.

2) a) Déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de f en $+\infty$.

3) a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à la fonction exp, montrer que

$$\forall u > 0,\ \left|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{u^3}{6}\exp(u).$$

En déduire que

$$\forall x > 0 \text{ et } \forall t \in [x; 3x],\ \left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Montrer alors que :

$$\left|f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c) En déduire que l'on peut écrire au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3 + \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\varphi \ : \ t \longmapsto \exp\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue. En effet,

$w \ : \ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ w$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc φ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ des primitives. Soit Φ l'une d'entre elles.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \Phi(3x) - \Phi(x)$.

$x \longmapsto \Phi(3x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \longmapsto 3x$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) = 3\Phi'(3x) - \Phi'(x) = 3\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- Signe de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} - \exp\frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}\left(3 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\right) \\ &= \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}\underbrace{\left(3 - \exp\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right)\right)}_{v(x)} \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $v(x) = 3 - \exp\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right)$.

$$\begin{aligned} v(x) \geq 0 &\iff \exp\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}}\right) \leq 3 \\ &\iff 0 < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3x}} \leq \ln 3 \quad \textbf{(car } \ln \textbf{ est strictement croissante)} \\ &\iff \sqrt{3x} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3} > 0 \\ &\qquad \textbf{(car } \sqrt{3}x \textbf{ et } \ln 3 \textbf{ sont strictement positifs)} \\ &\iff 3x \geq \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2 > 0 \\ &\qquad \textbf{(inégalité entre nombres strictement positifs)} \\ &\iff x \geq \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2 > 0 \quad \textbf{(on a divisé par } 3 > 0). \end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variations suivant où $\alpha = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\ln 3}\right)^2$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

QUESTION–2

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \longmapsto \exp\frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante. Donc elle est décroissante sur $[x, 3x], \forall x > 0$.

On a $\forall t \in [x, 3x],\ \exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Intégrons cet encadrement entre x et $3x$ (**les bornes sont dans l'ordre croissant car** $x > 0$). On obtient :

$\int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{3x}}dt \leq \int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \int_x^{3x} \exp\frac{1}{\sqrt{x}}dt$, soit

$$\boxed{2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x\exp\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \textbf{(1)}}$$

a)

Déterminons la limite de f en 0^++.

Posons $h(x) = x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}}$.

$h(x)$ est strictement positif, on peut en prendre le ln .

$\ln h(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3x}}\left(\sqrt{3}\sqrt{x}\ln x + 1\right)$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to^+} \sqrt{x}\ln x = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to^+}(\sqrt{3}\sqrt{x}\ln x + 1) = 1$, et comme $\lim\limits_{x\to^+}\frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$, on conclut que

$\lim\limits_{x\to^+}\ln h(x) = +\infty$. Or $h(x) = \exp\ln h(x)$, donc

$$\lim_{x\to^+} h(x) = +\infty.$$

$$\boxed{2h(x) \leq f(x) \text{ et } \lim_{x\to^+} h(x) = +\infty \text{ implique } \lim_{x\to^+} f(x) = +\infty.}$$

b)

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

Reprenons l'encadrement $2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq f(x) \leq 2x\exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} = +\infty$ car $\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \to 1$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Divisons l'encadrement par $2x > 0$, on obtient

$\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{f(x)}{2x} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\frac{1}{\sqrt{3x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2x} = 1$.

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

QUESTION–3

a)

• La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$; on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre sur n'importe quel intervalle fermé.

Appliquons Taylor-Lagrange à l'ordre deux sur l'intervalle $[0, u]$ où $u \in \mathbb{R}_+^*$.

$|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq M\frac{u^3}{6}$ où M est un majorant de la dérivée troisième de exp sur $[0; u]$, donc M est un majorant de exp sur $[0; u]$. On peut prendre pour M le maximum de exp sur $[0; u]$, soit $M = \exp(u)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient

$$\boxed{|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}| \leq \frac{u^3}{6}\exp(u).}$$

• Soit $u = \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t \in [x; 3x]$. On a alors

$$\left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or $0 < x \leq t \leq 3x$, donc **puisque la fonction racine carrée est croissante** on obtient l'encadrement

$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{3x}$.

On peut passer aux inverses car il s'agit de **nombres strictement positifs** :

$\frac{1}{\sqrt{3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc

$\forall t \in [x; 3x],\ \exp\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}$ du fait de la croissance de exp .

L'inégalité de Taylor-Lagrange devient :

$$\boxed{\forall t \in [x; 3x],\ \left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right| \leq \left(\frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

b)

Intégrons entre x et $3x$; comme **les bornes sont dans l'ordre croissant**, il vient

$$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \exp\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{3x}\frac{1}{6t^{\frac{3}{2}}}dt, \text{ soit}$$

$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \frac{1}{3}\exp\frac{1}{\sqrt{x}}[-\frac{1}{\sqrt{t}}]_x^{3x}$. Ce qui donne

$$\int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Or on sait, puisque $x \leq 3x$, que

$$\left|\int_x^{3x}\left(\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right)dt\right| \leq \int_x^{3x}\left|\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right|dt. \qquad \textbf{(2)}$$

On a donc finalement, en comparant **(1)** et **(2)**,

$$\left|\int_x^{3x}\left(\exp\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}\right)dt\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le premier membre se calcule et on obtient

$$\boxed{\left|f(x) - 2x - 2(\sqrt{3} - 1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

c)

Posons $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3$.

L'encadrement précédent donne $|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3x}}\right)\exp\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc

le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

L'égalité $\varepsilon(x) = f(x) - 2x - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln 3$ est équivalente à

$$\boxed{f(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3 + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.}$$

QUESTION–4

a)

La fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$\forall x > 0,\ g(x) = 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln 3$ est continue, dérivable, strictement croissante.

On a facilement le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
g	$\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) - g(x) = \varepsilon(x)$, donc les courbes représentatives de f et de g sont asymptotes en $+\infty$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021