EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–21

Soit n un entier naturel strictement positif et a un réel strictement positif.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$I_n(a,x) = \int_0^x \frac{t^n}{(2at+1)^n} dt \text{ et } J_n(a) = I_n(a,a).$$

1) Calculer $I_1(a,x)$ et en donner un équivalent simple lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers 0.

2) a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(a) = \frac{a}{2a^2+1}.$$

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ g(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{2ax+1}.$$

Etudier la variation de φ et en déduire un encadrement de $J_n(a)$.
Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(a) = 0$.

3) a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(a,x)$ et $I_{n-1}(a,x)$, pour $n \geq 2$.

b) Montrer que $I_2(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^2}$.

4) On se propose de montrer par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$ suivante :

$$\mathcal{H}_n \ :\ I_n(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies.

b) On suppose dorénavant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ / $\mathcal{H}_n$ soit vraie.
Montrer qu'il existe une fonction α telle que

$$I_n(a,x) = \frac{x}{(2a)^n}\Big(1+\alpha(x)\Big), \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

c) En déduire que

$$I_{n+1}(a,x) = \underbrace{\frac{1}{2an}\frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n(2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x)}_{D(x)}.$$

Evaluer le terme de plus haut degré du numérateur de $C(x)$ et montrer que

$$C(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

d) Etablir alors que

$$I_n(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n} \Longrightarrow I_{n+1}(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

Conclure.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION–1

$$\begin{aligned} I_1(a,x) &= \int_0^x \frac{t}{2at+1}dt = \frac{1}{2a}\int_0^x \frac{2at+1-1}{2at+1}dt \\ &= \frac{1}{2a}\int_0^x (1-\frac{1}{2at+1})dt \\ &= \frac{1}{2a}\Big(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{2at+1}dt\Big) \quad \textbf{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{2a}\Big(x - \frac{1}{2a}\left[\ln(2at+1)\right]_0^x\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1(a,x) = \frac{x}{2a} - \frac{\ln(2ax+1)}{4a^2}.}$$

- **en** $+\infty$

$\ln(2ax+1) = \circ\Big(\frac{x}{2a}\Big)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2ax+1)}{\frac{x}{2a}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2ax+1)}{2ax+1}\frac{2ax+1}{\frac{x}{2a}} \\ &= 0\times 4a^2 = 0 \quad \textbf{(croissances comparées)}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{I_1(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2a}.}$

- **en** 0

$2ax \to 0$ lorsque $x \to 0$; effectuons un DL de $\ln(2ax+1)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 (car les termes de degré 1 en x vont disparaître).

$\ln(2ax+1) = 2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I_1(a,x) &= \frac{x}{2a} - \frac{1}{4a^2}(2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x)) \\ &= \frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

Or on sait que, si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, où $\deg P_n \le n$ et P_n n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{0}{\sim} P_n(x)$.

C'est l'une des utilisations du développement limité d'une fonction que de donner des équivalents de cette fonction.

donc $\boxed{I_1(a,x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$

QUESTION–2

a)

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(a) = \frac{1-2a^2}{(2a^2+1)^2}$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

(car $\lim\limits_{+\infty} g(a) = 0$).

Il apparaît que g admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum absolu, atteint en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et qui vaut $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; donc

$$\boxed{\forall a \geq 0,\ 0 \leq g(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot}$$

b)

$\varphi'(x) = \frac{1}{(2ax+1)^2} > 0$, **donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[0;a]$.** On a donc l'encadrement $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(a) = g(a)$;

élevons à la puissance n, cela donne (**les nombres sont positifs**)

$$0 \leq (\varphi(x))^n \leq (g(a))^n \ ;$$

intégrons entre 0 et a (**les bornes sont dans l'ordre croissant**); il vient

$$\boxed{0 \leq J_n(a) \leq \int_0^a (g(a))^n dx = a(g(a))^n. \qquad \textbf{(1)}}$$

Or $0 \leq (g(a)) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 \Longrightarrow 0 \leq (g(a)) < 1$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} (g(a))^n = 0$ (**suite géométrique de raison positive, strictement inférieure à** 1).

$$\boxed{\text{Le théorème d'encadrement appliqué à } \textbf{(1)} \text{ donne } \lim_{n\to+\infty} J_n(a) = 0.}$$

QUESTION–3

a)

La plupart du temps les relations de récurrence entre intégrales dépendant d'un paramètre se trouvent en intégrant par parties ; c'est ce que nous faisons.

$$\begin{array}{lllllll} u(t) & = & t^n & ; & u'(t) & = & nt^{n-1} \\ v'(t) & = & \frac{1}{(2at+1))^n} & ; & v(t) & = & -\frac{1}{2a(n-1)}\frac{1}{(2at+1)^{n-1}} \end{array}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ pour $n \geq 2$.

$$I_n(a,x) = -\frac{1}{2a(n-1)}\left[\frac{t^n}{(2at+1)^{n-1}}\right]_0^x + \frac{n}{2a(n-1)}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(2at+1)^{n-1}}dt$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ I_n(a,x) = -\frac{1}{2a(n-1)}\frac{x^n}{(2ax+1)^{n-1}} + \frac{n}{2a(n-1)}I_{n-1}(a,x).}$$

b)

Appliquons la relation précédente pour $n = 2$; il vient

$I_2(a,x) = -\frac{1}{2a}\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{1}{a}I_1(a,x)$. Or

$I_1(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2a}$, ce qui permet d'écrire

$I_1(a,x) = \frac{x}{2a}(1+\varepsilon_1(x))$, avec $\lim\limits_{xto+\infty} \varepsilon_1(x) = 0$. En substituant dans la relation entre $I_2(a,x)$ et $I_1(a,x)$ on obtient :

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\begin{aligned} I_2(a,x) &= -\frac{1}{2a}\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{1}{a}\frac{x}{2a}(1+\varepsilon_1(x)) \\ &= \frac{1}{2a}\Big(-\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{x}{a}\Big) + \frac{x}{2a^2}\varepsilon_1(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2a}\Big(\frac{ax^2+x}{a(2ax+1)}\Big)}_{A(x)} + \underbrace{\frac{x}{2a^2}\varepsilon_1(x)}_{B(x)} \end{aligned}$$

Or $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$ et $B(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$, donc

$A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{A(x)+B(x)}{A(x)} &= 1+\frac{B(x)}{A(x)}. \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{B(x)}{A(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{B(x)}{\frac{x}{4a^2}} \quad (\textbf{car } A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}) \\ &= \lim_{x\to+\infty} 4a^2\frac{B(x)}{x} \\ &= 0 \ (\textbf{car } B(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)\textbf{, donc} \\ \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{B(x)}{A(x)}\Big) &= 1. \end{aligned}$$

Finalement $A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)$ et $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$, donc

$A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$. Il s'ensuit que

$$\boxed{I_2(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}.}$$

QUESTION–4

a)

Cela résulte des questions précédentes.

b)

On peut effectivement écrire $I_n(a,x) = \frac{x}{(2a)^n}(1+\alpha(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$, car cela exprime que $I_n(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}$.

c)

La relation de récurrence entre $I_{n+1}(a,x)$ et $I_n(a,x)$ s'écrit :

$I_{n+1}(a,x) = -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}I_n(a,x)$. (cf question 3)

En substituant, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a,x) &= -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}\Big(\frac{x}{(2a)^n}(1+\alpha(x))\Big) \\ &= -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n} + \frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2an}\frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n(2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x)}_{D(x)} \end{aligned}$$

- $C(x)$ est une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme de degré $n+1$;

en effet : dans $(2ax+1)^n$, le terme de plus haut degré est $(2a)^n x^n$ (il suffit de considérer le développement par la formule du binôme de Newton), donc le terme en x^{n+1} du numérateur est $\Big(-(2a)^n + (n+1)(2a)^n\Big)x^{n+1}$, c'est-à-dire $n(2a)^n x^{n+1}$. Il s'ensuit que

$$C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na}\frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n(2ax+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na}\frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n(2ax)^n} = \frac{1}{2a}\frac{x}{(2a)^n} = \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\text{Donc } \boxed{C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.}$$

d)

$D(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$, donc $C(x) + D(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}$, d'après le raisonnement fait à la question **3 b)** avec $A(x) + B(x)$.

$$\boxed{I_{n+1}(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.}$$

Ceci montre que la propriété H_n est héréditaire et le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure qu'elle est vraie pour tous les entiers non nuls.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}.}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021