EXERCICES DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−21

Soit n un entier naturel strictement positif et a un réel strictement positif.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$I_n(a,x) = \int_0^x \frac{t^n}{(2at+1)^n} dt \text{ et } J_n(a) = I_n(a,a).$$

1) Calculer $I_1(a,x)$ et en donner un équivalent simple lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers 0.

2) a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(a) = \frac{a}{2a^2+1}.$$

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+, \ g(a) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{2ax+1}.$$

Etudier la variation de φ et en déduire un encadrement de $J_n(a)$.
Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(a) = 0$.

3) a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(a,x)$ et $I_{n-1}(a,x)$, pour $n \geq 2$.

b) Montrer que $I_2(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{(2a)^2}$.

4) On se propose de montrer par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$ suivante :

$$\mathcal{H}_n \ : \ I_n(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}.$$

a) Vérifier que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies.

b) On suppose dorénavant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ / $\mathcal{H}_n$ soit vraie.
Montrer qu'il existe une fonction α telle que

$$I_n(a,x) = \frac{x}{(2a)^n}\Big(1+\alpha(x)\Big), \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

c) En déduire que

$$I_{n+1}(a,x) = \underbrace{\frac{1}{2an}\,\frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n(2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an}\,\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x)}_{D(x)}.$$

Evaluer le terme de plus haut degré du numérateur de $C(x)$ et montrer que

$$C(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

d) Etablir alors que

$$I_n(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n} \Longrightarrow I_{n+1}(a,x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

Conclure.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

$$\begin{aligned} I_1(a,x) &= \int_0^x \frac{t}{2at+1}dt = \frac{1}{2a}\int_0^x \frac{2at+1-1}{2at+1}dt \\ &= \frac{1}{2a}\int_0^x (1-\frac{1}{2at+1})dt \\ &= \frac{1}{2a}\left(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{2at+1}dt\right) \quad \textbf{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{2a}\left(x - \frac{1}{2a}\left[\ln(2at+1)\right]_0^x\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1(a,x) = \frac{x}{2a} - \frac{\ln(2ax+1)}{4a^2}.}$$

- **en** $+\infty$

$\ln(2ax+1)=\circ\left(\frac{x}{2a}\right)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2ax+1)}{\frac{x}{2a}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2ax+1)}{2ax+1}\frac{2ax+1}{\frac{x}{2a}} \\ &= 0\times 4a^2 = 0 \quad \textbf{(croissances comparées)}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{I_1(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2a}.}$$

- **en** 0

$2ax \to 0$ lorsque $x \to 0$; effectuons un DL de $\ln(2ax+1)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 (car les termes de degré 1 en x vont disparaître).

$\ln(2ax+1) = 2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I_1(a,x) &= \frac{x}{2a} - \frac{1}{4a^2}(2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x)) \\ &= \frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon(x), \end{aligned}$$

Or on sait que, si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, où $\deg P_n \le n$ et P_n n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{0}{\sim} P_n(x)$.

C'est l'une des utilisations du développement limité d'une fonction que de donner des équivalents de cette fonction.

$$\text{donc } \boxed{I_1(a,x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$

QUESTION−2

a)

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(a) = \frac{1-2a^2}{(2a^2+1)^2}$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

(car $\lim\limits_{+\infty} g(a) = 0$).

Il apparaît que g admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum absolu, atteint en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et qui vaut $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; donc

$$\boxed{\forall a \geq 0,\ 0 \leq g(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.}$$

b)

$\varphi'(x) = \dfrac{1}{(2ax+1)^2} > 0$, **donc** φ **est croissante sur** $\mathbb{R}_+$**, donc sur** $[0; a]$**.** On a donc l'encadrement $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(a) = g(a)$;

élevons à la puissance n, cela donne (**les nombres sont positifs**)

$$0 \leq (\varphi(x))^n \leq (g(a))^n \ ;$$

intégrons entre 0 et a (**les bornes sont dans l'ordre croissant**); il vient

$$\boxed{0 \leq J_n(a) \leq \int_0^a (g(a))^n dx = a(g(a))^n. \qquad \textbf{(1)}}$$

Or $0 \leq (g(a)) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1 \Longrightarrow 0 \leq (g(a)) < 1$; ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} (g(a))^n = 0$ (**suite géométrique de raison positive, strictement inférieure à** 1).

$$\boxed{\text{Le théorème d'encadrement appliqué à } \textbf{(1)} \text{ donne } \lim_{n\to+\infty} J_n(a) = 0.}$$

QUESTION−3

a)

La plupart du temps les relations de récurrence entre intégrales dépendant d'un paramètre se trouvent en intégrant par parties ; c'est ce que nous faisons.

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^n & ; & u'(t) & = & nt^{n-1} \\ v'(t) & = & \dfrac{1}{(2at+1))^n} & ; & v(t) & = & -\dfrac{1}{2a(n-1)}\dfrac{1}{(2at+1)^{n-1}} \end{array}$$

u **et** v **sont** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0; x]$ **pour** $n \geq 2$.

$$I_n(a,x) \ = -\frac{1}{2a(n-1)}\left[\frac{t^n}{(2at+1)^{n-1}}\right]_0^x + \frac{n}{2a(n-1)}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(2at+1)^{n-1}}dt$$

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ I_n(a,x) = -\frac{1}{2a(n-1)}\frac{x^n}{(2ax+1)^{n-1}} + \frac{n}{2a(n-1)}I_{n-1}(a,x).}$$

b)

Appliquons la relation précédente pour $n = 2$; il vient

$I_2(a,x) = -\dfrac{1}{2a}\dfrac{x^2}{(2ax+1)} + \dfrac{1}{a}I_1(a,x)$. Or

$I_1(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2a}$, ce qui permet d'écrire

$I_1(a,x) = \dfrac{x}{2a}(1+\varepsilon_1(x))$, avec $\lim\limits_{xto+\infty} \varepsilon_1(x) = 0$. En substituant dans la relation entre $I_2(a,x)$ et $I_1(a,x)$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_2(a,x) &= -\frac{1}{2a}\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{1}{a}\frac{x}{2a}(1+\varepsilon_1(x))\\
&= \frac{1}{2a}\left(-\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2}\varepsilon_1(x)\\
&= \underbrace{\frac{1}{2a}\left(\frac{ax^2+x}{a(2ax+1)}\right)}_{A(x)} + \underbrace{\frac{x}{2a^2}\varepsilon_1(x)}_{B(x)}
\end{aligned}
$$

Or $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$ et $B(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$, donc

$A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)\cdot$ En effet,

$$
\begin{aligned}
\frac{A(x)+B(x)}{A(x)} &= 1+\frac{B(x)}{A(x)}\cdot\\
\lim_{x\to+\infty}\frac{B(x)}{A(x)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{B(x)}{\frac{x}{4a^2}} \quad \textbf{(car } A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}\textbf{)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} 4a^2\frac{B(x)}{x}\\
&= 0 \ \textbf{(car } B(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)\textbf{), donc}\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{B(x)}{A(x)}\right) &= 1.
\end{aligned}
$$

Finalement $A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)$ et $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$, donc

$A(x)+B(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}\cdot$ Il s'ensuit que

$$
\boxed{I_2(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}\cdot}
$$

QUESTION−4

a)

Cela résulte des questions précédentes.

b)

On peut effectivement écrire $I_n(a,x) = \frac{x}{(2a)^n}(1+\alpha(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, car cela exprime que $I_n(a,x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}\cdot$

c)

La relation de récurrence entre $I_{n+1}(a,x)$ et $I_n(a,x)$ s'écrit :

$I_{n+1}(a,x) = -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}I_n(a,x)$. (cf question 3)

En substituant, on a :

$$
\begin{aligned}
I_{n+1}(a,x) &= -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}\left(\frac{x}{(2a)^n}(1+\alpha(x))\right)\\
&= -\frac{1}{2an}\frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n} + \frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x)\\
&= \underbrace{\frac{1}{2an}\frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n(2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an}\frac{x}{(2a)^n}\alpha(x)}_{D(x)}
\end{aligned}
$$

- $C(x)$ est une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme de degré $n+1$;

en effet : dans $(2ax+1)^n$, le terme de plus haut degré est $(2a)^n x^n$ (il suffit de considérer le développement par la formule du binôme de Newton), donc le terme en x^{n+1} du numérateur est $\Big(-(2a)^n + (n+1)(2a)^n\Big)x^{n+1}$, c'est-à-dire $n(2a)^n x^{n+1}$. Il s'ensuit que

$$
C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na}\frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n(2ax+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na}\frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n(2ax)^n} = \frac{1}{2a}\frac{x}{(2a)^n} = \frac{x}{(2a)^{n+1}}\cdot
$$

$$\text{Donc } \boxed{C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.}$$

d)

$D(x) \underset{+\infty}{=} \circ(x)$, donc $C(x) + D(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{(2a)^{n+1}}$, d'après le raisonnement fait à la question **3 b)** avec $A(x) + B(x)$.

$$\boxed{I_{n+1}(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.}$$

Ceci montre que la propriété H_n est héréditaire et le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure qu'elle est vraie pour tous les entiers non nuls.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_n(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}.}$$

