

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-21

Soit n un entier naturel strictement positif et a un réel strictement positif.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$I_n(a, x) = \int_0^x \frac{t^n}{(2at+1)^n} dt \text{ et } J_n(a) = I_n(a, a).$$

1) Calculer $I_1(a, x)$ et en donner un équivalent simple lorsque x tend vers $+\infty$ puis lorsque x tend vers 0.

2) a) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$g(a) = \frac{a}{2a^2 + 1}.$$

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+, g(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

b) On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{2ax + 1}.$$

Etudier la variation de φ et en déduire un encadrement de $J_n(a)$.

Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(a) = 0$.

3) a) Trouver une relation de récurrence entre $I_n(a, x)$ et $I_{n-1}(a, x)$, pour $n \geq 2$.

b) Montrer que $I_2(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^2}$.

4) On se propose de montrer par récurrence la propriété \mathcal{H}_n suivante :

$$\mathcal{H}_n : I_n(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}.$$

a) Vérifier que \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont vraies.

b) On suppose dorénavant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ / \mathcal{H}_n soit vraie.

Montrer qu'il existe une fonction α telle que

$$I_n(a, x) = \frac{x}{(2a)^n} (1 + \alpha(x)), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0.$$

c) En déduire que

$$I_{n+1}(a, x) = \underbrace{\frac{1}{2an} \frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n (2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an} \frac{x}{(2a)^n} \alpha(x)}_{D(x)}.$$

Evaluer le terme de plus haut degré du numérateur de $C(x)$ et montrer que

$$C(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

d) Etablir alors que

$$I_n(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n} \implies I_{n+1}(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

Conclure.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION-1

$$\begin{aligned}
 I_1(a, x) &= \int_0^x \frac{t}{2at+1} dt = \frac{1}{2a} \int_0^x \frac{2at+1-1}{2at+1} dt \\
 &= \frac{1}{2a} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2at+1}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2a} \left(\int_0^x dt - \int_0^x \frac{1}{2at+1} dt \right) \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\
 &= \frac{1}{2a} \left(x - \frac{1}{2a} [\ln(2at+1)]_0^x \right)
 \end{aligned}$$

$$I_1(a, x) = \frac{x}{2a} - \frac{\ln(2ax+1)}{4a^2}.$$

• en $+\infty$

$\ln(2ax+1) = o\left(\frac{x}{2a}\right)$. En effet,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2ax+1)}{\frac{x}{2a}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2ax+1)}{2ax+1} \frac{2ax+1}{\frac{x}{2a}} \\
 &= 0 \times 4a^2 = 0 \quad (\text{croissances comparées}).
 \end{aligned}$$

Donc $I_1(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2a}$.

• en 0

$2ax \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$; effectuons un DL de $\ln(2ax+1)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 (car les termes de degré 1 en x vont disparaître).

$\ln(2ax+1) = 2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
 I_1(a, x) &= \frac{x}{2a} - \frac{1}{4a^2} \left(2ax - \frac{4a^2x^2}{2} + 4a^2x^2\varepsilon(x) \right) \\
 &= \frac{x^2}{2} - x^2\varepsilon(x),
 \end{aligned}$$

Or on sait que, si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$, où $\deg P_n \leq n$ et P_n n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{0}{\sim} P_n(x)$.

C'est l'une des utilisations du développement limité d'une fonction que de donner des équivalents de cette fonction.

donc $I_1(a, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

QUESTION-2

a)

g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $g'(a) = \frac{1-2a^2}{(2a^2+1)^2}$. Ce qui donne le tableau de variations suivant :

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

a	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g'(a)$	+	0	-
g	0	\nearrow	\searrow
		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0

(car $\lim_{+\infty} g(a) = 0$).

Il apparaît que g admet sur \mathbb{R}_+ un maximum absolu, atteint en $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et qui vaut $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; donc

$$\forall a \geq 0, 0 \leq g(a) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b)

$\varphi'(x) = \frac{1}{(2ax+1)^2} > 0$, donc φ est croissante sur \mathbb{R}_+ , donc sur $[0; a]$. On a donc l'encadrement $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(a) = g(a)$;

élevons à la puissance n , cela donne (les nombres sont positifs)

$$0 \leq (\varphi(x))^n \leq (g(a))^n ;$$

intégrons entre 0 et a (les bornes sont dans l'ordre croissant); il vient

$$0 \leq J_n(a) \leq \int_0^a (g(a))^n dx = a(g(a))^n. \quad (1)$$

Or $0 \leq (g(a)) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1 \implies 0 \leq (g(a))^n < 1$; ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(a))^n = 0$ (suite géométrique de raison positive, strictement inférieure à 1).

Le théorème d'encadrement appliqué à (1) donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(a) = 0$.

QUESTION-3

a)

La plupart du temps les relations de récurrence entre intégrales dépendant d'un paramètre se trouvent en intégrant par parties ; c'est ce que nous faisons.

$$\begin{aligned} u(t) &= t^n & ; & \quad u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) &= \frac{1}{(2at+1)^n} & ; & \quad v(t) = -\frac{1}{2a(n-1)} \frac{1}{(2at+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

u et v sont C^1 sur $[0; x]$ pour $n \geq 2$.

$$I_n(a, x) = -\frac{1}{2a(n-1)} \left[\frac{t^n}{(2at+1)^{n-1}} \right]_0^x + \frac{n}{2a(n-1)} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(2at+1)^{n-1}} dt$$

$$\forall n \geq 2, I_n(a, x) = -\frac{1}{2a(n-1)} \frac{x^n}{(2ax+1)^{n-1}} + \frac{n}{2a(n-1)} I_{n-1}(a, x).$$

b)

Appliquons la relation précédente pour $n = 2$; il vient

$$I_2(a, x) = -\frac{1}{2a} \frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{1}{a} I_1(a, x). \text{ Or}$$

$$I_1(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2a}, \text{ ce qui permet d'écrire}$$

$I_1(a, x) = \frac{x}{2a}(1 + \varepsilon_1(x))$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(x) = 0$. En substituant dans la relation entre $I_2(a, x)$ et

$I_1(a, x)$ on obtient :

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\begin{aligned}
 I_2(a, x) &= -\frac{1}{2a} \frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{1}{a} \frac{x}{2a} (1 + \varepsilon_1(x)) \\
 &= \frac{1}{2a} \left(-\frac{x^2}{(2ax+1)} + \frac{x}{a} \right) + \frac{x}{2a^2} \varepsilon_1(x) \\
 &= \frac{1}{2a} \underbrace{\left(\frac{ax^2+x}{a(2ax+1)} \right)}_{A(x)} + \underbrace{\frac{x}{2a^2} \varepsilon_1(x)}_{B(x)}
 \end{aligned}$$

Or $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$ et $B(x) = o(x)$, donc

$A(x) + B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)$. En effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{A(x) + B(x)}{A(x)} &= 1 + \frac{B(x)}{A(x)} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{B(x)}{A(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{4a^2}} \quad (\text{car } A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4a^2 \frac{B(x)}{x} \\
 &= 0 \quad (\text{car } B(x) = o(x)), \text{ donc}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{B(x)}{A(x)} \right) = 1.$$

Finalement $A(x) + B(x) \underset{+\infty}{\sim} A(x)$ et $A(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$, donc

$A(x) + B(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}$. Il s'ensuit que

$$\boxed{I_2(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{4a^2}.}$$

QUESTION-4

a)

Cela résulte des questions précédentes.

b)

On peut effectivement écrire $I_n(a, x) = \frac{x}{(2a)^n} (1 + \alpha(x))$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$, car cela exprime que $I_n(a, x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}$.

c)

La relation de récurrence entre $I_{n+1}(a, x)$ et $I_n(a, x)$ s'écrit :

$$I_{n+1}(a, x) = -\frac{1}{2an} \frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an} I_n(a, x). \quad (\text{cf question 3})$$

En substituant, on a :

$$\begin{aligned}
 I_{n+1}(a, x) &= -\frac{1}{2an} \frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an} \left(\frac{x}{(2a)^n} (1 + \alpha(x)) \right) \\
 &= -\frac{1}{2an} \frac{x^{n+1}}{(2ax+1)^n} + \frac{n+1}{2an} \frac{x}{(2a)^n} + \frac{n+1}{2an} \frac{x}{(2a)^n} \alpha(x) \\
 &= \frac{1}{2an} \underbrace{\frac{-(2a)^n x^{n+1} + (n+1)x(2ax+1)^n}{(2a)^n (2ax+1)^n}}_{C(x)} + \underbrace{\frac{n+1}{2an} \frac{x}{(2a)^n} \alpha(x)}_{D(x)}
 \end{aligned}$$

• $C(x)$ est une fraction rationnelle, dont le numérateur est un polynôme de degré $n+1$;

en effet : dans $(2ax+1)^n$, le terme de plus haut degré est $(2a)^n x^n$ (il suffit de considérer le développement par la formule du binôme de Newton), donc le terme en x^{n+1} du numérateur est $(-(2a)^n + (n+1)(2a)^n)x^{n+1}$, c'est-à-dire $n(2a)^n x^{n+1}$. Il s'ensuit que

$$C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na} \frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n (2ax+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2na} \frac{n(2a)^n x^{n+1}}{(2a)^n (2ax)^n} = \frac{1}{2a} \frac{x}{(2a)^n} = \frac{x}{(2a)^{n+1}}.$$

$$\text{Donc } \boxed{C(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}}.$$

d)

$D(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$, donc $C(x) + D(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}$, d'après le raisonnement fait à la question **3 b)** avec $A(x) + B(x)$.

$$\boxed{I_{n+1}(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^{n+1}}}.$$

Ceci montre que la propriété H_n est héréditaire et le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure qu'elle est vraie pour tous les entiers non nuls.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(a, x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{(2a)^n}}.$$