

SUJET

1. Exercice

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0, 1[.$$

- b. En déduire le signe de $\ln(2 - e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
 c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2 - e^{1/k})$?
 d. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

3. a. Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

- b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$.
 c. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K > 0$.
 Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

- a. Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.
 b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont deux suites adjacentes.
 c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. Exercice

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$, à coefficients réels.
 Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A ", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :



$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note tA la transposée de la matrice A .

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

- a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

- b. Soit λ une valeur propre de tAA et X un vecteur propre associé.

En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geq 0$.

- c. On pose $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

- d. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

- e. On note E_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^tE_i S E_i = \|{}^tB P E_i\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_i S E_i$ en fonction des coefficients de S .

Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n , sur le signe de s_{ii} ?

- f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$



3. Problème

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X, Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(Cov(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

- b. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(Cov(X, Y))^2 = V(X)V(Y) ?$$

3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$. On définit sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ la fonction L_n par :

$$\begin{cases} L_n(a, b) = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leq a \leq A \\ L_n(a, b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

1. Justifier que L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$.
Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.

2. Montrer que

$$\forall a \in]0, A[, \forall b \in]0, +\infty[, L_n(a, b) < L_n(A, b).$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A, +\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(b) = L_n(A, b)$.

Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S, n .

4. Dédurre de ce qui précède que L_n admet sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0, b_0) que l'on précisera.

3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geq a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p , $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.
5. *Simulation de la loi $\mathcal{E}(a,b)$.*
 - a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
Montrer que la variable aléatoire $-b \ln(1-U) + a$ suit une loi $\mathcal{E}(a,b)$.
 - b. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geq 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b .

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans `S` et `Y`).

```

begin
  randomize ;
  readln(a,b,n) ;
  X:=tirage(a,b) ;
  S:=... ;
  Y:=... ;
  for i:= 2 to n do...
                                .....
                                .....
                                .....
  ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .



3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \dots + (X_n - a)$?
En déduire une densité de S_n .
4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n .
En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).
Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

5. a. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a .
b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
A l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.
6. On pose $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$.

- a. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b .
b. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n . Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{Cov}(S_n, Y_n).$$

- c. A l'aide du préliminaire montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné (x_1, \dots, x_n) , avec $\min\{x_1, \dots, x_n\} \neq \max\{x_1, \dots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires X_1, \dots, X_n , on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n f_{a,b}(x_i).$$

- a. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i .
b. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon (x_1, \dots, x_n) à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

ECRICOME 2007 VOIE S

CORRIGE

1.EXERCICE

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \text{ donc}$$

$$2 - e^x = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u(x)$$

$$\text{avec } u(x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ tel que } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$$

$$\ln(2 - e^x) = \ln(1 + u(x)) = u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) + o(u^2(x))$$

Or $u(x) \underset{(0)}{\sim} -x$, donc $o(u^2(x)) = o(x^2)$. D'autre part $u^2(x) \underset{(0)}{\sim} x^2 \implies u^2(x) = x^2 + o(x^2)$, donc

$$\ln(2 - e^x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2)$$

1.1)

Remarquons que $k \geq 2 \iff 0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$

Etudions la fonction g définie sur $]0, \frac{1}{2}]$ par $g(t) = 2 - e^t$. Elle est évidemment continue, dérivable et strictement décroissante ($g'(t) = -e^t$) : cela donne le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$
g	1	\searrow	$2 - \sqrt{e}$

On constate que $2 - \sqrt{e} > 0$ car $4 > e$.

$$\forall k \geq 2, 0 < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1$$

1.2)

On a tout de suite

$$\forall k \geq 2, \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) < 0$$

1.3)

D'après la question **1.1**), $\ln(2 - e^x) \underset{(0)}{\sim} -x$.

Donc puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$, on a $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{1}{k}$

Par la règle d'équivalence des séries de signe constant, la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ est divergente, puisque la série de terme général $-\frac{1}{k}$ est divergente.

1.4)

La suite (V_n) est la suite des sommes partielles d'une série à termes négatifs, divergente. C'est donc une suite strictement décroissante, non convergente : il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = -\infty$; or $u_n = \exp(V_n)$, donc par composition des limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2)**2.1)**

On a $\ln(nu_n) = \ln(n \exp(V_n)) = \ln n + V_n$.

Or $\ln(1 - \frac{1}{k}) = \ln(\frac{k-1}{k}) = \ln(k-1) - \ln k$. Il s'ensuit que

$$-\sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{1}{k}) = \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

(on aura reconnu ce que l'on appelle parfois une somme télescopique)

On a bien $\ln(nu_n) = -\sum_{k=2}^n \ln(1 - \frac{1}{k}) + \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$, donc

$$\forall n \geq 2, \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left(\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) \right)$$

2.2)

D'après la question **1.1**), $\ln(2 - \frac{1}{e^k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$;

d'autre part, $\ln(1 - \frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, donc

$$\ln(2 - \frac{1}{e^k}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Les deux séries de termes généraux $-\frac{1}{2k^2}$ et $o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ sont convergentes (et même absolument convergentes), il s'ensuit que la série de terme général $\ln(2 - \frac{1}{e^k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$ est convergente. Alors, par définition, la suite des sommes partielles de cette série est convergente vers un réel L . Or d'après la question précédente, cette suite des sommes partielles c'est la suite $(\ln(nu_n))$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln nu_n = L$, donc par composition des limites (ou par continuité de la fonction exponentielle au point L), on déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = e^L > 0$.
Posons $K = e^L$; puisque $K \neq 0$, on sait que $nu_n \underset{(+\infty)}{\sim} K$.

$u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{K}{n}$, donc la série de terme général u_n est divergente.

3)

3.1)

On a $S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k$.

$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{V_{k+1}-V_k} = e^{\ln(2-e^{\frac{1}{k+1}})} = 2 - e^{\frac{1}{k+1}} < 1$. Puisque les u_k sont strictement positifs, on en conclut que $u_{k+1} < u_k$.

La suite (u_n) est strictement décroissante

3.2)

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

puisque la suite (u_n) est strictement décroissante.

la suite (S_{2n}) est strictement décroissante

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+3} + u_{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

puisque la suite (u_n) est strictement décroissante.

la suite (S_{2n+1}) est strictement croissante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_{2n+1} = 0$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite. Il en résulte que la suite (S_n) est convergente et cela veut exactement dire que

la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente

2.EXERCICE

1)

• Rappelons que la transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ involutif, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad {}^t({}^t(A)) = A.$$

Soit $(A, A', B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A + A', B) &= \text{tr}({}^t(\lambda A + A')B) \\ &= \text{tr}((\lambda {}^t A + {}^t A')B) = \text{tr}(\lambda {}^t AB + {}^t A'B) \\ &= \lambda \text{tr}({}^t AB) + \text{tr}({}^t A'B) \\ &= \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A', B) \end{aligned}$$

• Montrons que φ est symétrique.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; ${}^t A = (\alpha_{i,j})$ / $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$

$${}^t AB = C \text{ avec } C = (c_{i,j}) \text{ / } c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j}$$

$$\varphi(A, B) = \text{tr}({}^t AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i} \tag{1}$$

$${}^tB = (\beta_{i,j}) / \beta_{i,j} = b_{j,i}$$

$${}^tBA = D \text{ avec } D = (d_{i,j}) / d_{i,j} = \sum_{k=1}^n \beta_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,j}$$

$$\varphi(B, A) = \text{tr}({}^tBA) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{k,i} \quad (2)$$

La comparaison de (1) et (2) montre que $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$

Conséquence : φ est linéaire par rapport à la première variable du couple, symétrique, donc (c'est un résultat classique), elle est linéaire par rapport à la seconde variable du couple.

φ est une forme symétrique, bilinéaire

- D'après le calcul précédent,

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$$

Il en résulte immédiatement que $\varphi(A, A) \geq 0$.

$$\varphi(A, A) = 0 \iff \forall (k, i) \in ([1, n])^2, a_{k,i}^2 = 0, \text{ donc } \forall (k, i) \in ([1, n])^2, a_{k,i} = 0$$

$$\varphi(A, A) = 0 \iff A = (0)$$

φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive :
c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2)

2.1) La matrice tAA est symétrique : en effet, d'après le calcul fait à la question précédente, on a

$${}^tAB = C \text{ avec } C = (c_{i,j}) / c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j},$$

donc ${}^tAA = C$ avec $C = (c_{i,j}) / c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$. Il est alors immédiat que $c_{i,j} = c_{j,i}$, donc la matrice tAA est symétrique.

Remarque : on a montré un résultat peut-être connu des étudiants, à savoir :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, {}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA.$$

Munissons \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique.

tAA est une matrice symétrique, réelle, donc diagonalisable en base orthonormée.

$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), D$ diagonale, $\exists P$ (orthogonale) $\in \text{GL}_n(\mathbb{R}) / {}^tP({}^tAA)P = D$

2.2)

Le réel λ valeur propre de tAA si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq (0)$ telle que ${}^tAAX = \lambda X$. Multiplions à gauche les deux termes de cette égalité par tX (ce qui est possible car ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$), il vient : ${}^tX({}^tAAX) = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$.

Or ${}^tX({}^tAAX) = ({}^tX{}^tA)AX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2$ et par suite, on obtient $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$ et puisque $X \neq (0)$, on déduit $\|X\| > 0$, on peut donc diviser par $\|X\|$, ce qui donne

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$$

λ valeur propre de tAA implique $\lambda \geq 0$

2.3)

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= (\varphi(A, A))^2 = \text{tr}({}^tAA). \text{ Or} \\ \text{tr}(D) &= \text{tr}({}^tP({}^tAAP)) \\ &= \text{tr}({}^t(P{}^tAA)P) \\ &= \text{tr}(P({}^tP{}^tAA)) \text{ d'après la propriété admise dans l'énoncé} \\ &= \text{tr}((P{}^tP){}^tAA) = \text{tr}({}^tAA) \end{aligned}$$

Car la matrice P est une matrice orthogonale, donc ${}^tP = P^{-1}$, ou encore $P{}^tP = I_n$.

$$\text{tr}(D) = \text{tr}({}^tP({}^tAAP)) = \text{tr}({}^tAA), \text{ donc } (N(A))^2 = \text{tr}(D) \text{ et de même } (N(B))^2 = \text{tr}(S)$$

• D'autre part,

$$\begin{aligned} SD &= ({}^tPB{}^tBP)({}^tP{}^tAAP) = {}^tPB{}^tB(P{}^tP){}^tAAP \\ &= {}^tPB{}^tBI_n{}^tAAP = {}^tPB{}^tB{}^tAAP \\ \text{tr}(SD) &= \text{tr}({}^tPB{}^tB{}^tAAP) = \text{tr}({}^tP(B{}^tB{}^tAA)P) \\ &= \text{tr}(B{}^tB{}^tAA) = \text{tr}(AB{}^tB{}^tA) \\ &= \text{tr}((AB{}^t(AB))) = \varphi(AB, AB) \\ \text{tr}(SD) &= (N(AB))^2 \end{aligned}$$

2.4)

Notons $SD = (\alpha_{i,j})$ avec $\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k}d_{k,j}$. Donc $\alpha_{i,i} = \sum_{k=1}^n s_{i,k}d_{k,i} = s_{i,i}\lambda_i$ puisque la matrice D est diagonale et que, par conséquent, tous les termes de la colonne numéro i sont nuls sauf peut-être celui de la diagonale, c'est-à-dire $d_{i,i} = \lambda_i$

2.5)

$${}^tE_iSE_i = {}^tE_i{}^tPB{}^tBPE_i = {}^t({}^tBPE_i)({}^tBPE_i) = \|{}^tBPE_i\|^2$$

E_i est la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \neq i \implies c_k = 0$ et $c_i = 1$

$$SE_i = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ avec } \beta_j = \sum_{k=1}^n s_{j,k}c_k = s_{j,i} \text{ puisque tous les } c_k \text{ sont nuls sauf } c_i = 1$$

$${}^tE_i(SE_i) = (c_1 \quad \dots \quad c_n) \begin{pmatrix} s_{1,i} \\ \vdots \\ s_{n,i} \end{pmatrix} = s_{i,i} \text{ (même raison que précédemment).}$$

L'égalité ${}^tE_iSE_i = \|{}^tBPE_i\|^2$ implique $s_{i,i} \geq 0$

2.6)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{i,i}\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i s_{k,k} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i s_{i,i} + \sum_{k \neq i} \lambda_i s_{k,k}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \lambda_i s_{k,k} \end{aligned}$$

Or $\lambda_i \geq 0$ et $s_{i,i} \geq 0 \implies \lambda_i s_{i,i} \geq 0$ et de même $\lambda_i s_{k,k} \geq 0$; par conséquent $\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \lambda_i s_{k,k} \geq 0$.

$$\text{Il en résulte que } \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \lambda_i s_{k,k} \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i}$$

Par conséquent $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{i,i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i}$

La conclusion est immédiate :

puisque $\sum_{i=1}^n \lambda_i = (N(A))^2$, $\sum_{i=1}^n s_{i,i} = (N(B))^2$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i} = \text{tr}(SD) = (N(AB))^2$, on a bien

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{i,i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i} \iff (N(AB))^2 \leq (N(A))^2(N(B))^2, \text{ soit}$$

$N(AB) \leq N(A)N(B)$ puisqu'il s'agit d'inégalité entre nombres positifs ou nuls

3. PROBLEME

3.1) PRELIMINAIRES

C'est une question de cours : faisons-en la démonstration succinctement

$$\begin{aligned} V(\lambda X + Y) &= E\left(\left((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(\lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y))\right)^2\right) \\ &= E\left(\lambda^2(X - E(X))^2\right) + E\left((Y - E(Y))^2\right) + 2\lambda E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= \lambda^2 V(X) + V(Y) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

1.

Considérons cette expression comme un trinôme en λ (le coefficient de $\lambda^2 \neq 0$ par hypothèse). Ce trinôme est pour tout réel λ positif ou nul car c'est une variance ; il est donc du signe de $V(X)$, qui est le coefficient de λ^2 , donc il n'admet pas deux racines réelles distinctes ; il s'ensuit que son discriminant est négatif ou nul.

Ce qui donne $4(\text{cov}^2(X, Y) - V(X)V(Y)) \leq 0$, donc

$$\text{cov}^2(X, Y) \leq V(X)V(Y)$$

2.

On a égalité si et seulement si le discriminant est nul, donc si et seulement si le trinôme admet une racine réelle double, donc si et seulement si il existe un réel λ_0 tel que $V(\lambda_0 X + Y) = 0$. Or on sait (c'est toujours du cours) qu'une variable a une variance nulle si et seulement si elle est quasi-certaine.

$$\text{cov}^2(X, Y) = V(X)V(Y) \iff \exists (\lambda_0, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda_0 X + Y \text{ soit quasiment égale à } \mu, \text{ c'est-à-dire que } P(\lambda_0 X + Y = \mu) = 1$$

3.2) Partie I : étude d'une fonction de deux variables

1. Notons $D_1 =]0, A[\times]0, +\infty[$ et constatons que D_1 est un produit de deux intervalles ouverts, c'est donc bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Sur D_1 , $(a, b) \mapsto -\frac{1}{b}(-na + S)$ est de classe C^1 en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. L'exponentielle étant de classe C^1 sur \mathbb{R} , on conclut par composition que $(a, b) \mapsto \exp(-\frac{1}{b}(-na + S))$ est de classe C^1 sur D_1 . Puis $(a, b) \mapsto \frac{1}{b^n}$ est de classe C^1 sur D_1 en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc,

L_n apparaît sur D_1 comme le produit de deux fonctions de classe C^1 , donc L_n est de classe C^1 sur D_1 .

- **Cherchons les éventuels points critiques.**

$$\frac{\partial L_n}{\partial x}(a, b) = \frac{n}{b} \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b}(-na + S)\right) \neq 0 \text{ sur } D_1.$$

L_n n'admet pas de points critiques sur D_1 , donc elle n'y admet pas d'extremum

2.

L'application $\varphi : a \mapsto \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b}(-na + S)\right)$ est dérivable sur $]0, A[$ et

$\forall a \in]0, A[, \varphi'(a) = \frac{1}{b^n} \frac{n}{b} \exp\left(-\frac{1}{b}(-na + S)\right) > 0$. L'application φ est strictement croissante, donc $\forall a \in]0, A[, \varphi(a) < \varphi(A)$, soit

$$\forall a \in]0, A[, \forall b \in]0, +\infty[, L_n(a, b) < L_n(A, b)$$

Remarque : ce résultat reste vrai pour $a \in]A, +\infty[$, car alors $L_n(a, b) = 0 < L_n(A, b)$

3.

$\forall b > 0, g(b) = \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b}(-nA + S)\right)$. C'est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall b > 0,$

$$\begin{aligned} g'(b) &= \frac{1}{b^{2n}} \left(b^n \times \frac{-nA + S}{b^2} \exp\left(-\frac{1}{b}(-nA + S)\right) - nb^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{b}(-nA + S)\right) \right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{b}(-nA + S)\right)}{b^{n+2}} \left((-nA + S) - nb \right) \end{aligned}$$

$$g'(b) = 0 \iff b = b_0 = \frac{-nA + S}{n} > 0 \text{ car } nA < S.$$

De plus $b \leq b_0 \iff b \leq \frac{-nA + S}{n} \iff nb \leq S - nA \iff (-nA + S) - nb \geq 0$: on a donc le tableau de variations suivant :

b	0	b_0	$+\infty$
g	\nearrow		\searrow

La fonction g possède un maximum absolu sur $]0, +\infty[$ atteint au point $b_0 = \frac{-nA + S}{n}$

4.

- Sur $]0, A[\times]0, +\infty[, L_n(a, b) < L_n(A, b)$, donc $L_n(a, b) < g(b) \leq g(b_0)$
- sur $]A, +\infty[\times]0, +\infty[, L_n(a, b) = 0 \leq g(b_0)$

La fonction L_n admet donc sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu, atteint au point $(a_0, b_0) = \left(A, \frac{-nA + S}{n}\right)$

3.3) Partie II : étude d'une loi

1.

La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$ sans problème ; elle y est positive. Puisque

$$f_{a,b}(x) = 0 \text{ si } x < a, I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x) dx \text{ convergera et vaudra 1 si et seulement si}$$

$$I = \int_a^{+\infty} f_{a,b}(x) dx \text{ converge et vaut 1, c'est-à-dire si et seulement si}$$

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) dx \text{ converge et vaut } 1.$$

Posons dans cette intégrale $u = \frac{x-a}{b}$ (le changement de variable est légitime puisqu'il est affine) ; $du = \frac{1}{b} dx$

$I = \int_0^{+\infty} \exp(-u) du = 1$ car on reconnaît l'intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Résumé : La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$, positive ou nulle sur \mathbb{R} et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) dx = 1$.

La fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité

2.

Notons $F_{a,b}$ la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}(a,b)$

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) dt & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Dans l'intégrale effectuons le changement de variable $u = \frac{t-a}{b}$; alors $du = \frac{1}{b} dt$, donc

$$\int_a^x \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) dt = \int_0^{\frac{x-a}{b}} \exp(-u) du = [-\exp(-u)]_0^{\frac{x-a}{b}} = 1 - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)$$

La fonction de répartition de X est $F_{a,b}$ donnée par :

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

3.

Soit $Y = X - a$; $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq x + a) = F_{a,b}(x + a)$$

Si $x < 0$, alors $x + a < a$ et $P(Y \leq x) = 0$ car $F_{a,b}(a + x) = 0$

Si $x \geq 0$, alors $x + a \geq a$ et $P(Y \leq x) = F_{a,b}(a + x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$

La variable $Y = X - a$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{b}\right)$

On sait que $E(Y) = b$ et $V(Y) = b^2$; or $X = Y + a$, donc $E(X) = a + b$ et $V(X) = b^2$

4.

L'espérance de X^p existe si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$ est absolument convergente, ce qui revient à dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$ est absolument convergente, donc convergente puisque sur $[a, +\infty[$ (avec $a \geq 0$) $x^p f_{a,b}(x) \geq 0$. Dans ces conditions,

$$x^p f_{a,b}(x) = x^p \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) = \frac{\exp\left(\frac{a}{b}\right)}{b} x^p \exp\left(-\frac{x}{b}\right)$$

Par croissance comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2+p} \exp(-\frac{x}{b}) = 0$, donc $x^p \exp(-\frac{x}{b}) = o(\frac{1}{x^2})$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente car $2 > 0$ et par la règle de négligeabilité, on déduit que $\int_a^{+\infty} x^p \exp(-\frac{x}{b}) dx$ est convergente.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x) dx$ est absolument convergente, donc $\forall p \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre p

Soit $p \geq 1$ et $c \geq a$

$I_{p-1}(c) = \int_a^c x^{p-1} \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b}) dx$. Faisons une intégration par parties :

$u'(x) = x^{p-1}$; $u(x) = \frac{1}{p} x^p$; $v(x) = \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b})$; $v'(x) = -\frac{1}{b^2} \exp(-\frac{x-a}{b})$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} I_{p-1}(c) &= \left[\frac{x^p}{p} \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b}) \right]_a^c + \frac{1}{pb} \int_a^c x^p \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b}) dx \\ &= \frac{c^p}{p} \frac{1}{b} \exp(-\frac{c-a}{b}) - \frac{a^p}{pb} + \frac{1}{pb} I_p(c) \end{aligned}$$

Prenons les limites lorsque $c \rightarrow +\infty$

$\lim_{c \rightarrow +\infty} I_{p-1}(c) = E(X^{p-1})$; $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{c^p}{p} \frac{1}{b} \exp(-\frac{c-a}{b}) = 0$ par croissances comparées et $\lim_{c \rightarrow +\infty} I_p(c) = E(X^p)$. On obtient

$$\forall p \geq 1, E(X^{p-1}) = -\frac{a^p}{pb} + E(X^p)$$

5.

• **1.** Notons F_V la fonction de répartition de la variable $V = -b \ln(1-U) + a$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F_V(x) &= P(-b \ln(1-U) + a \leq x) \\ &= P(\ln(1-U) \geq \frac{a-x}{b}) \\ &= P(1-U \geq \exp(-\frac{x-a}{b})) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(U \leq 1 - \exp(-\frac{x-a}{b})) \end{aligned}$$

Si $x < a$, alors $\exp(-\frac{x-a}{b}) > 1$ puisque $\frac{x-a}{b} < 0$, donc $1 - \exp(-\frac{x-a}{b}) < 0$ et

$$P(U \leq 1 - \exp(-\frac{x-a}{b})) = 0$$

Si $x \geq a$, alors $\exp(-\frac{x-a}{b}) \leq 1$ puisque $\frac{x-a}{b} \leq 0$, donc $0 \leq 1 - \exp(-\frac{x-a}{b}) < 1$; il s'ensuit que $P(U \leq 1 - \exp(-\frac{x-a}{b})) = 1 - \exp(-\frac{x-a}{b})$

Conclusion : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \exp(-\frac{x-a}{b}) & \text{si } x \geq a \end{cases}$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}_{a,b}$; donc V suit la loi $\mathcal{E}_{a,b}$. On peut prendre pour densité de V , $f_{a,b}$

• 2.

On va simuler la fonction de répartition d'une telle variable en utilisant la relation précédente, c'est-à-dire en écrivant une telle variable sous la forme $-b \ln(1-U) + a$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, donc où U sera simulée par la fonction random.

```
function Tirage(a :real ; b :real ; x :real) ;
var u , F : real ;
Begin
randomize ;
if x <= a then Tirage(a,b,x):=0 else
begin u:=random ; F:=-b*ln(1-u)+a ; Tirage(a,b,x):=F;
End.
```

3.4) Partie III : estimation des paramètres a et b

1.

```
Begin
randomize ;
readln(a,b,n) ;
X:= Tirage(a,b) ;
S:=X ; Y:=X ;
for i:= 2 to n do
begin
S:=S+X ;
if X <= Y then Y:=X
end ;
End ;
```

Remarque : l'idée est que $\min(a, b, c) = \min(\min(a, b), c)$

2.

$E(S_n) = nE(X_1) = n(a + b)$ et $V(S_n) = nV(X_1) = nb^2$ par indépendance des variables X_i .
Donc, d'après la question 3.3.3

$$E(S_n) = n(a + b) \text{ et } V(S_n) = nb^2$$

3.

Les variables $(X_i - a)$ ($1 \leq i \leq n$) sont indépendantes, donc $\sum_{i=1}^n (X_i - a)$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ d'après un résultat classique du cours.

$$S_n - na \text{ suit la loi } \Gamma(\frac{1}{b}, n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(S_n \leq x) = P(S_n - na \leq x - na).$$

Rappelons qu'une densité de la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ est $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{b^n \Gamma(n)} x^{n-1} \exp(-\frac{x}{b}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc la fonction de répartition d'une variable Z_n qui suit la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ est

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{b^n \Gamma(n)} \int_0^x t^{n-1} \exp(-\frac{t}{b}) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou encore } F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{b^n(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} \exp(-\frac{t}{b}) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc la fonction de répartition de S_n est donnée par

$$F_{S_n}(x) = F(x - na) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < na \\ \frac{1}{b^n(n-1)!} \int_0^{x-na} t^{n-1} \exp(-\frac{t}{b}) dt & \text{si } x \geq na \end{cases}$$

Une densité de S_n est donc f_{S_n} donnée par

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < na \\ \frac{1}{b^n(n-1)!} (x - na)^{n-1} \exp(-\frac{1}{b}(x - na)) & \text{si } x \geq na \end{cases}$$

4.

$$Y_n(\Omega) = [a, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \forall x < a, F_{Y_n}(x) &= 0 \\ \forall x \geq a, F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) \\ &= 1 - P(Y_n > x) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k > x)\right) \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

Car les variables $X_k / (1 \leq k \leq n)$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de X .

$$\begin{aligned} \forall x \geq a, F_{Y_n}(x) &= 1 - \left(1 - (1 - \exp(-\frac{1}{b}(x - a)))\right)^n \\ &= 1 - \exp(-\frac{n}{b}(x - a)) \end{aligned}$$

$$Y_n \text{ suit la loi } \mathcal{E}\left(\frac{b}{n}, a\right); \text{ d'après la question 4) } E(Y_n) = a + \frac{b}{n} \text{ et } V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$$

4.1)

Par définition, le biais de Y_n en tant qu'estimateur de a est $b_{Y_n} = E(Y_n) - a = \frac{b}{n}$

Pour une variable T admettant un moment d'ordre 2, l'inégalité de Markov est :

$$\forall \lambda > 0, P(|T| \geq \lambda) \leq \frac{E(T^2)}{\lambda^2}$$

(Y_n) est une suite d'estimateurs asymptotiquement convergents si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{Y_n} = 0$, ce qui est manifestement le cas vu l'expression de b_{Y_n}

La suite (Y_n) d'estimateurs de a est convergente si $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - a| > \varepsilon) = 0$.

Or $Y_n - a$ est une variable positive ou nulle puisque $Y_n(\Omega) = [a, +\infty[$. Elle possède un moment d'ordre 2 puisque $V(Y_n - a) = V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$. Nous pouvons appliquer l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, P(|Y_n - a| > \varepsilon) &= P(Y_n - a > \varepsilon) \\ &\leq \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E((Y_n - a)^2) &= V(Y_n - a) + (E(Y_n - a))^2 \\ &= V(Y_n) + (E(Y_n) - a)^2 \\ &= \frac{b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n^2} = 2\frac{b^2}{n^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E((Y_n - a)^2) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} = 0$ et par conséquent

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - a| > \varepsilon) = 0$ par encadrement

La suite (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais et convergents

5)

5.1

Le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b est :

$$\begin{aligned} b_{Z_n} &= E(Z_n) - b \\ &= \frac{1}{n} E(Z_n) - E(Y_n) - b \\ &= \frac{1}{n} n(a + b) - (a + \frac{b}{n}) - b \quad \text{d'après la question 3.3.2 de la partie 3.4} \end{aligned}$$

Le biais de Z_n est $b_{Z_n} = -\frac{b}{n}$

5.2

Le risque quadratique de Z_n , en tant qu'estimateur de b est :

$$\begin{aligned} r_{Z_n}(b) &= E((Z_n - b)^2) \\ &= V(Z_n) + b_{Z_n}^2 = V(Z_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= V\left(\frac{S_n}{n} - Y_n\right) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= V\left(\frac{S_n}{n}\right) + V(Y_n) - 2 \operatorname{cov}\left(\frac{S_n}{n}, Y_n\right) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} V(S_n) + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n} \operatorname{cov}(S_n, Y_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} (nb^2) + 2 \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n} \operatorname{cov}(S_n, Y_n) \end{aligned}$$

$$r_{Z_n} = \frac{b^2}{n} + 2 \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n} \operatorname{cov}(S_n, Y_n)$$

5.3

D'après les préliminaires, on a : $(\operatorname{cov}(S_n, Y_n))^2 \leq V(S_n) \times V(Y_n)$.

Or Y_n suit la loi $\mathcal{E}(a, \frac{b}{n})$ d'après la question 4., donc $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$ et $V(S_n) = nb^2$ d'après la question 2. Il en résulte que

$(\operatorname{cov}(S_n, Y_n))^2 \leq \frac{b^4}{n}$. Cela implique (par encadrement) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{cov}(S_n, Y_n) = 0$.

Conclusion : L'expression de r_{Z_n} permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n} = 0$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{Z_n} = 0$ ce qui veut dire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$ ce qui implique que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b convergents.

6)

6.1)

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n f_{a,b}(x_i) \quad \text{avec} \quad f_{a,b}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \leq a \\ \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) & \text{si } x_i \geq a \end{cases}$$

- Si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq a$, alors

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b^n} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)\right)\right) \\ &= \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^n x_i - na\right)\right) \end{aligned}$$

Remarquons que la condition $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \geq a$ équivaut à $\min(x_i)_{1 \leq i \leq n} \geq a$

- Dans le cas contraire, $a > \min(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors il existe un indice $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_j < a$ et dans cette condition, $f_{a,b}(x_j) = 0$, donc $\prod_{i=1}^n \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x_i - a}{b}\right) = 0$

En résumé : $L(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > \min(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{1}{b^n} \exp\left(-\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^n x_i - na\right)\right) & \text{si } a \leq \min(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Il apparaît donc que $L(a, b) = L_n(a, b)$ pour $A = \min(x_1, \dots, x_n)$ et $S = \sum_{i=1}^n x_i$

6-b)

On a obtenu dans le **I**) : $a_0 = A = \min(x_1, \dots, x_n)$ et $b_0 = \frac{S}{n} - A$.

$\min(x_1, \dots, x_n)$ et $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \min(x_1, \dots, x_n)$ sont les réalisations sur l'échantillon de Y_n et de Z_n . On obtient donc les mêmes résultats.