Mathématiques - OPTION SCIENTIFIQUE

SUJET

1. Exercice

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0,1[.$$

   b. En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

   c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?

   d. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

   Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} V_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

3. a. Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\frac{1}{k})\right].$$

   b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln(1-\dfrac{1}{k})$.

   c. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\dfrac{K}{n}$ avec $K > 0$. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

   a. Etudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

   b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.

   c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

2. Exercice

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle "trace de A", et on note $Tr(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{ où } {}^tAB = \ {}^tA \times B).$$

Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On notera par la suite λ_i le coefficient d_{ii} de la matrice $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.
En calculant ${}^tX{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c. On pose $S = \ {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

d. Montrer que

$$Tr(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii}.$$

e. On note E_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^tE_iSE_i = ||{}^tBPE_i||^2,$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de s_{ii} ?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{ii} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{ii}\right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3. Problème

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit la covariance de X et Y par

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel λ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda Cov(X,Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(Cov(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

b. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(Cov(X,Y))^2 = V(X)V(Y) \text{ ?}$$

3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

n désigne un entier non nul, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ la fonction L_n par :

$$\begin{cases} L_n(a,b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leqslant a \leqslant A \\ L_n(a,b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

1. Justifier que L_n est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$.
Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.

2. Montrer que
$$\forall a \in [0,A[,\ \forall b \in]0,+\infty[,\ L_n(a,b) < L_n(A,b).$$
Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A,+\infty[$.

3. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(b) = L_n(A,b)$.
Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0,+\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S, n.

4. Déduire de ce qui précède que L_n admet sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0,b_0) que l'on précisera.

3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \dfrac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathcal{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p, $E(X^p)$, et pour $p > 0$ déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.

5. *Simulation de la loi* $\mathcal{E}(a,b)$.

   a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U)+a$ suit une loi $\mathcal{E}(a,b)$.

   b. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
   Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(a,b)$.

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{E}(a,b)$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $Y_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b.

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a,b,X,S,Y` de type `real` et `i,n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule S_n et Y_n (les valeurs étant stockées respectivement dans `S` et `Y`).

```
begin
  randomize ;
  readln(a,b,n) ;
  X:=tirage(a,b) ;
  S:=... ;
  Y:=...;
  for i:= 2 to n do...
                ......
                ......
                ......
  ...
end.
```

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \cdots + (X_n - a)$? En déduire une densité de S_n.

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n).
Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

5. a. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.

   b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.
   A l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.

6. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$.

   a. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b.

   b. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n. Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} Cov(S_n, Y_n).$$

   c. A l'aide du préliminaire montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

   et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $\min\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$

   a. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i.

   b. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2007

ECRICOME 2007 VOIE S

CORRIGE

1.EXERCICE

1)

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$\begin{aligned} 2 - e^x &= 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u(x) \\ &\text{avec } u(x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{tel que } \lim_{x \to 0} u(x) = 0 \\ \ln(2 - e^x) &= \ln(1 + u(x)) = u(x) - \frac{1}{2}u^2(x) + o(u^2(x)) \end{aligned}$$

Or $u(x) \underset{(0)}{\sim} -x$, donc $o(u^2(x)) = o(x^2)$. D'autre part $u^2(x)) \underset{(0)}{\sim} x^2 \Longrightarrow u^2(x) = x^2 + o(x^2)$, donc

$$\boxed{\ln(2 - e^x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^2)) + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2)}$$

1.1)

Remarquons que $k \geq 2 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$

Etudions la fonction g définie sur $]0, \frac{1}{2}]$ par $g(t) = 2 - e^t$. Elle est évidemment continue, dérivable et strictement décroissante $(g'(t) = -e^t)$: cela donne le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$
g	1	$\searrow$	$2 - \sqrt{e}$

On constate que $2 - \sqrt{e} > 0$ car $4 > e$.

$$\boxed{\forall k \geq 2, \ 0 < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1}$$

1.2)

On a tout de suite

$$\boxed{\forall k \geq 2, \ \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) < 0}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

1.3)

D'après la question **1.1)**, $\ln(2-e^x) \underset{(0)}{\sim} -x$.

Donc puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$, on a $\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{1}{k}$

$$\boxed{\text{Par la règle d'équivalence des séries de signe constant, la série de terme général } \ln(2-e^{\frac{1}{k}}) \text{ est divergente, puisque la série de terme général } -\frac{1}{k} \text{ est divergente.}}$$

1.4)

La suite (V_n) est la suite des sommes partielles d'une série à termes négatifs, divergente. C'est donc une suite strictement décroissante, non convergente : il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n) = -\infty$; or $u_n = \exp(V_n)$, donc par composition des limites

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

2)

2.1)

On a $\ln(nu_n) = \ln(n\exp(V_n)) = \ln n + V_n$.

Or $\ln(1-\frac{1}{k}) = \ln(\frac{k-1}{k}) = \ln(k-1) - \ln k$. Il s'ensuit que

$$-\sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k}) = \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1)) = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

(on aura reconnu ce que l'on appelle parfois une somme télescopique)

On a bien $\ln(nu_n) = -\sum\limits_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k}) + \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(2-e^{\frac{1}{k}})$, donc

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(2-e^{\frac{1}{k}}) - \ln(1-\frac{1}{k})\Big)}$$

2.2)

D'après la question **1.1)**, $\ln(2-\frac{1}{e^k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$;

d'autre part, $\ln(1-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$, donc

$$\ln(2-\frac{1}{e^k}) - \ln(1-\frac{1}{k}) = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big) = -\frac{1}{2k^2} + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$

Les deux séries de termes généraux $-\frac{1}{2k^2}$ et $o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$ sont convergentes (et même absolument convergentes), il s'ensuit que la série de terme général $\ln(2-\frac{1}{k}) - \ln(1-\frac{1}{k})$ est convergente. Alors, par définition, la suite des sommes partielles de cette série est convergente vers un réel L. Or d'après la question précédente, cette suite des sommes partielles c'est la suite $(\ln(nu_n))$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a } \lim\limits_{n\to+\infty} \ln nu_n = L, \text{ donc par composition des limites (ou par continuité} \\ \text{de la fonction exponentielle au point } L\text{), on déduit : } \lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = e^L > 0. \\ \text{Posons } K = e^L \text{ ; puisque } K \neq 0, \text{ on sait que } nu_n \underset{(+\infty)}{\sim} K. \\ \qquad u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{K}{n}, \text{ donc la série de terme général } u_n \text{ est divergente.}\end{array}}$$

3)

3.1)

On a $S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k$.

$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{V_{k+1}-V_k} = e^{\ln(2-e^{\frac{1}{k+1}})} = 2 - e^{\frac{1}{k+1}} < 1$. Puisque les u_k sont strictement positifs, on en conclut que $u_{k+1} < u_k$.

$$\boxed{\textbf{La suite } (u_n) \textbf{ est strictement décroissante}}$$

3.2)

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

puisque la suite (u_n) est strictement décroissante.

la suite (S_{2n}) est strictement décroissante

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+3} + u_{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

puisque la suite (u_n) est strictement décroissante.

la suite (S_{2n+1}) est strictement croissante

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -u_{2n+1} = 0$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite. Il en résulte que la suite (S_n) est convergente et cela veut exactement dire que

la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente

2.EXERCICE

1)

- Rappelons que la transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ involutif, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^t({}^t(A)) = A.$$

Soit $(A, A', B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A + A', B) &= \mathrm{tr}({}^t(\lambda A + A')B) \\ &= \mathrm{tr}((\lambda {}^t A + {}^t A')B) = \mathrm{tr}(\lambda {}^t AB + {}^t A'B) \\ &= \lambda\, \mathrm{tr}({}^t AB) + \mathrm{tr}({}^t A'B) \\ &= \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A'B) \end{aligned}$$

- Montrons que φ est symétrique.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; ${}^t A = (\alpha_{i,j})\ /\ \alpha_{i,j} = a_{j,i}$

${}^t AB = C$ avec $C = (c_{i,j})\ /\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}$

$$\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^t AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i} \qquad \textbf{(1)}$$

${}^tB = (\beta_{i,j}) \ / \ \beta_{i,j} = b_{j,i}$

${}^tBA = D$ avec $D = (d_{i,j}) \ / \ d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{k,j}$

$$\varphi(B,A) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{k,i} \qquad \textbf{(2)}$$

La comparaison de **(1)** et **(2)** montre que $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$

Conséquence : φ est linéaire par rapport à la première variable du couple, symétrique, donc (c'est un résultat classique), elle est linéaire par rapport à la seconde variable du couple.

φ est une forme symétrique, bilinéaire

- D'après le calcul précédent,

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2$$

Il en résulte immédiatement que $\varphi(A,A) \geq 0$.

$\varphi(A,A) = 0 \iff \forall (k,i) \in ([\![1,n]\!])^2,\ a_{k,i}^2 = 0$, donc $\forall (k,i) \in ([\![1,n]\!])^2,\ a_{k,i} = 0$

$\varphi(A,A) = 0 \iff A = (0)$

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi \text{ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive :} \\ \text{c'est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\end{array}}$$

2)

2.1) La matrice ${}^tAA$ est symétrique : en effet, d'après le calcul fait à la question précédente, on a

${}^tAB = C$ avec $C = (c_{i,j}) \ / \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}$,

donc ${}^tAA = C$ avec $C = (c_{i,j}) \ / \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}$. Il est alors immédiat que $c_{i,j} = c_{j,i}$, donc la matrice ${}^tAA$ est symétrique.

Remarque : on a montré un résultat peut-être connu des étudiants, à savoir :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ {}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA.$$

Munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

${}^tAA$ est une matrice symétrique, réelle, donc diagonalisable en base orthonormée.

$$\boxed{\exists\, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ D \text{ diagonale},\ \exists\, P \text{ (orthogonale)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tP({}^tAA)P = D}$$

2.2)

Le réel λ valeur propre de ${}^tAA$ si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq (0)$ telle que ${}^tAAX = \lambda X$. Multiplions à gauche les deux termes de cette égalité par ${}^tX$ (ce qui est possible car ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$) , il vient : ${}^tX({}^tAAX) = \lambda {}^tXX = \lambda ||X||^2$.

Or ${}^tX({}^tAAX) = ({}^tX{}^tA)AX = {}^t(AX)AX = ||AX||^2$ et par suite, on obtient $||AX||^2 = \lambda ||X||^2$ et puisque $X \neq (0)$, on déduit $||X|| > 0$, on peut donc diviser par $||X||$, ce qui donne $\lambda = \dfrac{||AX||^2}{||X||^2} \geq 0$

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } {}^tAA \text{ implique } \lambda \geq 0}$$

2.3)

$||A||^2 = (\varphi(A,A))^2 = \mathrm{tr}({}^tAA)$. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(D) &= \mathrm{tr}({}^tP({}^tAAP))\\ &= \mathrm{tr}(({}^tP{}^tAA)P)\\ &= \mathrm{tr}(P({}^tP{}^tAA)) \quad \text{d'après la propriété admise dans l'énoncé}\\ &= \mathrm{tr}((P{}^tP){}^tAA) = \mathrm{tr}({}^tAA)\end{aligned}$$

Car la matrice P est une matrice orthogonale, donc ${}^tP = P^{-1}$, ou encore $P{}^tP = I_n$.

$$\boxed{\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}({}^tP({}^tAAP)) = \mathrm{tr}({}^tAA), \text{ donc } (N(A))^2 = \mathrm{tr}(D) \text{ et de même } (N(B))^2 = \mathrm{tr}(S)}$$

- D'autre part,

$$\begin{aligned}SD &= ({}^tPB{}^tBP)({}^tP{}^tAAP) = {}^tPB{}^tB(P{}^tP){}^tAAP\\ &= {}^tPB{}^tBI_n{}^tAAP = {}^tPB{}^tB{}^tAAP\\ \mathrm{tr}(SD) &= \mathrm{tr}({}^tPB{}^tB{}^tAAP) = \mathrm{tr}({}^tP(B{}^tB{}^tAA)P)\\ &= \mathrm{tr}(B{}^tB{}^tAA)) = \mathrm{tr}(AB{}^tB{}^tA)\\ &= \mathrm{tr}((AB{}^t(AB)) = \varphi(AB,AB)\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(SD) = (N(AB))^2$$

2.4)

Notons $SD = (\alpha_{i,j})$ avec $\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}d_{k,j}$. Donc $\alpha_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}d_{k,i} = s_{i,i}\lambda_i$ puisque la matrice D est diagonale et que, par conséquent, tous les termes de la colonne numéro i sont nuls sauf peut-être celui de la diagonale, c'est-à-dire $d_{i,i} = \lambda_i$

2.5)

${}^tE_iSE_i = {}^tE_i{}^tPB{}^tBPE_i = {}^t({}^tBPE_i)({}^tBPE_i) = ||{}^tPBE_i||^2$

E_i est la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ avec $\forall k \in [\![1,n]\!],\ k \neq i \Longrightarrow c_k = 0$ et $c_i = 1$

$SE_i = \begin{pmatrix} \beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ avec $\beta_j = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k}c_k = s_{j,i}$ puisque tous les c_k sont nuls sauf $c_i = 1$

${}^tE_i(SE_i) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{1,i}\\ \vdots\\ s_{n,i}\end{pmatrix} = s_{i,i}$ (même raison que précédemment).

L'égalité ${}^tE_iSE_i = ||{}^tPBE_i||^2$ implique $s_{i,i} \geq 0$

2.6)

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}s_{i,i}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i s_{k,k}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i s_{i,i} + \sum_{k\neq i}\lambda_i s_{k,k})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}\lambda_i s_{k,k}\end{aligned}$$

Or $\lambda_i \geq 0$ et $s_{i,i} \geq 0 \Longrightarrow \lambda_i s_{i,i} \geq 0$ et de même $\lambda_i s_{k,k} \geq 0$; par conséquent $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}\lambda_i s_{k,k} \geq 0$.

Il en résulte que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}\lambda_i s_{k,k} \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i}$

$$\boxed{\textbf{Par conséquent } (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}s_{i,i}) \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i}}$$

La conclusion est immédiate :
puisque $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = (N(A))^2$, $\sum_{i=1}^{n} s_{i,i} = (N(B))^2$ et $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i} = \mathrm{tr}(SD) = (N(AB))^2$, on a bien

$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}s_{i,i}) \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i} \Longleftrightarrow (N(AB))^2 \leq (N(A))^2(N(B))^2$, soit
$N(AB) \leq N(A)N(B)$ puisqu'il s'agit d'inégalité entre nombres positifs ou nuls

3.PROBLEME

3.1) PRELIMINAIRES

C'est une question de cours : faisons-en la démonstration succinctement

$$\begin{aligned} V\Big((\lambda X+Y) &= E\Big(\Big((\lambda X+Y)-E(\lambda X+Y)\Big)^2\Big)\\ &= E\Big(\Big(\lambda(X-E(X)+(Y-E(Y)\Big)^2\Big)\\ &= E\Big(\lambda^2(X-E(X))^2\Big)+E\Big((Y-E(Y))^2\Big)+2\lambda E\Big((X-E(X)(Y-E(Y)\Big)\\ &= \lambda^2 V(X)+V(Y)+2\lambda\,\mathrm{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

1.

Considérons cette expression comme un trinôme en λ (le coefficient de $\lambda^2 \neq 0$ par hypothèse). Ce trinôme est pour tout réel λ positif ou nul car c'est une variance ; il est donc du signe de $V(X)$, qui est le coefficient de λ^2, donc il n'admet pas deux racines réelles distinctes ; il s'ensuit que son discriminant est négatif ou nul.

Ce qui donne $4(\mathrm{cov}^2(X,Y)-V(X)V(Y)) \leq 0$, donc

$$\boxed{\mathrm{cov}^2(X,Y) \leq V(X)V(Y)}$$

2.

On a égalité si et seulement si le discriminant est nul, donc si et seulement si le trinôme admet une racine réelle double, donc si et seulement s'il existe un réel λ_0 tel que $V(\lambda_0 X+Y)=0$. Or on sait (c'est toujours du cours) qu'une variance a une variance nulle si et seulement si elle est quasi-certaine.

$\mathrm{cov}^2(X,Y) = V(X)V(Y) \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda_0,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \lambda_0 X+Y$ soit quasiment égale à μ, c'est-à-dire que $P(\lambda_0 X+Y=\mu)=1$

3.2) Partie I : étude d'une fonction de deux variables

1. Notons $D_1 =]0,A[\times]0,+\infty[$ et constatons que D_1 est un produit de deux intervalles ouverts, c'est donc bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Sur D_1, $(a,b) \longmapsto -\frac{1}{b}(-na+S)$ est de classe C^1 en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. L'exponentielle étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on conclut par composition que $(a,b) \longmapsto \exp(-\frac{1}{b}(-na+S))$ est de classe C^1 sur D_1. Puis $(a,b) \longmapsto \frac{1}{b^n}$ est de classe C^1 sur D_1 en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc,

L_n apparaît sur D_1 comme le produit de deux fonctions de classe C^1, donc **L_n est de classe C^1 sur D_1.**

- **Cherchons les éventuels points critiques.**

$\dfrac{\partial L_n}{\partial x}(a,b) = \dfrac{n}{b}\dfrac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(-na+S)) \neq 0$ sur D_1.

$$\boxed{L_n \text{ n'admet pas de points critiques sur } D_1\text{, donc elle n'y admet pas d'extremum}}$$

2.

L'application $\varphi\ :\ a \longmapsto \dfrac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(-na+S))$ est dérivable sur $[0,A]$ et

$\forall a \in [0,A],\ \varphi'(a) = \dfrac{1}{b^n}\dfrac{n}{b}\exp(-\frac{1}{b}(-na+S)) > 0$. L'application φ est strictement croissante, donc $\forall a \in [0,A[,\ \varphi(a) < \varphi(A)$, soit

$$\boxed{\forall a \in [0,A[,\ \forall b \in]0,+\infty[,\ L_n(a,b) < L_n(A,b)}$$

Remarque : ce résultat reste vrai pour $a \in]A,+\infty[$, car alors $L_n(a,b) = 0 < L_n(A,b)$

3.

$\forall b > 0,\ g(b) = \dfrac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(-nA+S))$. C'est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall b > 0$,

$$\begin{aligned} g'(b) &= \frac{1}{b^{2n}}\Big(b^n \times \frac{-nA+S}{b^2}\exp(-\tfrac{1}{b}(-nA+S)) - nb^{n-1}\exp(-\tfrac{1}{b}(-nA+S))\Big) \\ &= \frac{\exp(-\frac{1}{b}(-nA+S))}{b^{n+2}}((-nA+S)-nb) \end{aligned}$$

$g'(b) = 0 \iff b = b_0 = \dfrac{-nA+S}{n} > 0$ car $nA < S$.

De plus $b \leq b_0 \iff b \leq \dfrac{-nA+S}{n} \iff nb \leq S - nA \iff (-nA+S) - nb \geq 0$: on a donc le tableau de variations suivant :

b	0	b_0	$+\infty$
g	$\nearrow$		$\searrow$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ possède un maximum absolu sur }]0,+\infty[\text{ atteint au point } b_0 = \frac{-nA+S}{n}}$$

4.

- Sur $[0,A[\times]0,+\infty[,\ L_n(a,b) < L_n(A,b)$, donc $L_n(a,b) < g(b) \leq g(b_0)$
- sur $[A,+\infty[\times]0,+\infty[,\ L_n(a,b) = 0 \leq g(b_0)$

$$\boxed{\text{La fonction } L_n \text{ admet donc sur } [0,+\infty[\times]0,+\infty[\text{ un maximum absolu, atteint au point } (a_0,b_0) = (A, \frac{-nA+S}{n})}$$

3.3) Partie II : étude d'une loi

1.

La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$ sans problème ; elle y est positive. Puisque $f_{a,b}(x) = 0$ si $x < a$, $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ convergera et vaudra 1 si et seulement si

$I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f_{a,b}(x)dx$ converge et vaut 1, c'est-à-dire si et seulement si

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b})dx \text{ converge et vaut } 1.$$

Posons dans cette intégrale $u = \dfrac{x-a}{b}$ (le changement de variable est légitime puisqu'il est affine) ; $du = \frac{1}{b}dx$

$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u)du = 1$ car on reconnaît l'intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Résumé : La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b})dx = 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité}}$$

2.

Notons $F_{a,b}$ la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}(a,b)$

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b} \exp(-\frac{t-a}{b})dt & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Dans l'intégrale effectuons le changement de variable $u = \dfrac{t-a}{b}$; alors $du = \dfrac{1}{b}dt$, donc

$$\int_a^x \frac{1}{b} \exp(-\frac{t-a}{b})dt = \int_0^{\frac{x-a}{b}} \exp(-u)du = [-\exp(-u)]_0^{\frac{x-a}{b}} = 1 - \exp(-\frac{x-a}{b})$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction de répartition de } X \text{ est } F_{a,b} \text{ donnée par :} \\ F_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \exp(-\frac{x-a}{b}) & \text{si } x \geq a \end{cases}\end{array}}$$

3.

Soit $Y = X - a$; $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq x + a) = F_{a,b}(x + a)$

Si $x < 0$, alors $x + a < a$ et $P(Y \leq x) = 0$ car $F_{a,b}(a + x) = 0$

Si $x \geq 0$, alors $x + a \geq 0$ et $P(Y \leq x) = F_{a,b}(a + x) = 1 - \exp(-\frac{x}{b})$

$$\boxed{\text{La variable } Y = X - a \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(\tfrac{1}{b})}$$

On sait que $E(Y) = b$ et $V(Y) = b^2$; or $X = Y + a$, donc $\boxed{E(X) = a + b \text{ et } V(X) = b^2}$

4.

L'espérance de X^p existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f_{a,b}(x)dx$ est absolument convergente, ce qui revient à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x)dx$ est absolument convergente, donc convergente puisque sur $[a, +\infty[$ (avec $a \geq 0$) $x^p f_{a,b}(x) \geq 0$. Dans ces conditions,

$$x^p f_{a,b}(x) = x^p \frac{1}{b} \exp(-\frac{x-a}{b}) = \frac{\exp(\frac{a}{b})}{b} x^p \exp(-\frac{x}{b})$$

Par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2+p}\exp(-\frac{x}{b}) = 0$, donc $x^p\exp(-\frac{x}{b}) \underset{(+\infty)}{=} \circ(\frac{1}{x^2})$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est convergente car $2 > 0$ et par la règle de négligeabilité, on déduit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^p\exp(-\frac{x}{b})dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_a^{+\infty} x^p f_{a,b}(x)dx \text{ est absolument convergente, donc } \forall p\in\mathbb{N},\ X \text{ admet un moment d'ordre } p}$$

Soit $p \geq 1$ et $c \geq a$

$I_{p-1}(c) = \int_a^c x^{p-1}\frac{1}{b}\exp(-\frac{x-a}{b})dx$. Faisons une intégration par parties :

$u'(x) = x^{p-1}$; $u(x) = \frac{1}{p}x^p$; $v(x) = \frac{1}{b}\exp(-\frac{x-a}{b})$; $v'(x) = -\frac{1}{b^2}\exp(-\frac{x-a}{b})$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} I_{p-1}(c) &= \left[\frac{x^p}{p}\frac{1}{b}\exp(-\frac{x-a}{b})\right]_a^c + \frac{1}{pb}\int_a^c x^p\frac{1}{b}\exp(-\frac{x-a}{b})dx \\ &= \frac{c^p}{p}\frac{1}{b}\exp(-\frac{c-a}{b}) - \frac{a^p}{pb} + \frac{1}{pb}I_p(c) \end{aligned}$$

Prenons les limites lorsque $c \to +\infty$

$\lim\limits_{c\to+\infty} I_{p-1}(c) = E(X^{p-1})$; $\lim\limits_{c\to+\infty}\frac{c^p}{p}\frac{1}{b}\exp(-\frac{c-a}{b}) = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{c\to+\infty} I_p(c) = E(X^p)$. On obtient

$$\boxed{\forall p\geq 1,\ E(X^{p-1}) = -\frac{a^p}{pb} + E(X^p)}$$

5.

- **1.** Notons F_V la fonction de répartition de la variable $V = -b\ln(1-U)+a$

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R},\ F_V(x) &= P(-b\ln(1-U)+a\leq x) \\ &= P(\ln(1-U)\geq \frac{a-x}{b}) \\ &= P(1-U\geq \exp(-\frac{x-a}{b})) \quad \text{car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(U\leq 1-\exp(-\frac{x-a}{b})) \end{aligned}$$

Si $x < a$, alors $\exp(-\frac{x-a}{b}) > 1$ puisque $\frac{x-a}{b} < 0$, donc $1-\exp(-\frac{x-a}{b}) < 0$ et $P(U\leq 1-\exp(-\frac{x-a}{b})) = 0$

Si $x \geq a$, alors $\exp(-\frac{x-a}{b}) \leq 1$ puisque $\frac{x-a}{b} \leq 0$, donc $0 \leq 1-\exp(-\frac{x-a}{b}) < 1$; il s'ensuit que $P(U\leq 1-\exp(-\frac{x-a}{b})) = 1-\exp(-\frac{x-a}{b})$

Conclusion : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1-\exp(-\frac{x-a}{b}) & \text{si } x \geq a \end{cases}$

$$\boxed{\text{On reconnaît la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi } \mathcal{E}_{a,b} \text{ ; donc } V \text{ suit la loi } \mathcal{E}_{a,b}. \text{ On peut prendre pour densité de } V,\ f_{a,b}}$$

• **2.**

On va simuler la fonction de répartition d'une telle variable en utilisant la relation précédente, c'est-à-dire en écrivant une telle variable sous la forme $-b\ln(1-U)+a$ où U suit une loi uniforme sur $[0,1[$, donc où U sera simulée par la fonction random.

```
function Tirage(a :real ; b :real ; x :real) ;
var u , F : real ;
Begin
randomize ;
if x <= a then Tirage(a,b,x):=0 else
          begin u:=random ; F:=-b*ln(1-u)+a ; Tirage(a,b,x):=F;
End.
```

3.4) Partie III : estimation des paramètres a et b

1.

```
Begin
    randomize ;
    readln(a,b,n) ;
    X:= Tirage(a,b) ;
    S:=X ; Y:=X ;
    for i:= 2 to n do
          begin
          S:=S+X ;
          if X <= Y then Y:=X
          end ;
End ;
```

Remarque : l'idée est que $\min(a,b,c) = \min(\min(a,b),c)$

2.

$E(S_n) = nE(X_1) = n(a+b)$ et $V(S_n) = nV(X_1) = nb^2$ par indépendance des variables X_i. Donc, d'après la question 3.3.3

$$\boxed{E(S_n) = n(a+b) \text{ et } V(S_n) = nb^2}$$

3.

Les variables $(X_i - a)$ $(1 \leq i \leq n)$ sont indépendantes, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ d'après un résultat classique du cours.

$$S_n - na \text{ suit la loi } \Gamma(\frac{1}{b}, n)$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(S_n \leq x) = P(S_n - na \leq x - na)$.

Rappelons qu'une densité de la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ est $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{b^n\Gamma(n)} x^{n-1}\exp(-\frac{x}{b}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc la fonction de répartition d'une variable Z_n qui suit la loi $\Gamma(\frac{1}{b}, n)$ est

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{b^n\Gamma(n)}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}\exp(-\frac{t}{b})dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou encore } F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{b^n(n-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}\exp\left(-\frac{t}{b}\right)dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc la fonction de répartition de S_n est donnée par

$$F_{S_n}(x) = F(x-na) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < na \\ \dfrac{1}{b^n(n-1)!}\displaystyle\int_0^{x-na} t^{n-1}\exp\left(-\frac{t}{b}\right)dt & \text{si } x \geq na \end{cases}$$

Une densité de S_n est donc f_{S_n} donnée par

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < na \\ \dfrac{1}{b^n(n-1)!}(x-na)^{n-1}\exp\left(-\frac{1}{b}(x-na)\right) & \text{si } x \geq na \end{cases}$$

4.

$Y_n(\Omega) = [a, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x < a,\ F_{Y_n}(x) &= 0 \\ \forall x \geq a,\ F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) \\ &= 1 - P(Y_n > x) \\ &= 1 - P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k > x)\Big) \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n \end{aligned}$$

Car les variables X_k / $(1 \leq k \leq n)$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de X.

$$\begin{aligned} \forall x \geq a,\ F_{Y_n}(x) &= 1 - \Big(1 - (1 - \exp(-\frac{1}{b}(x-a))\Big)^n \\ &= 1 - \exp(-\frac{n}{b}(x-a)) \end{aligned}$$

$$\boxed{Y_n \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\frac{b}{n}, a)\ ;\ \text{d'après la question 4) } E(Y_n) = a + \frac{b}{n} \text{ et } V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}}$$

4.1)

Par définition, le biais de Y_n en tant qu'estimateur de a est $b_{Y_n} = E(Y_n) - a = \dfrac{b}{n}$

Pour une variable T admettant un moment d'ordre 2, l'inégalité de Markov est :

$$\forall \lambda > 0,\ P(|T| \geq \lambda) \leq \frac{E(T^2)}{\lambda^2}$$

(Y_n) est une suite d'estimateurs asymptotiquement convergents si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{Y_n} = 0$, ce qui est manifestement le cas vu l'expression de b_{Y_n}

La suite (Y_n) d'estimateurs de a est convergente si $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - a| > \varepsilon) = 0$.

Or $Y_n - a$ est une variable positive ou nulle puisque $Y_n(\Omega) = [a, +\infty[$. Elle possède un moment d'ordre 2 puisque $V(Y_n - a) = V(Y_n) = \dfrac{b^2}{n^2}$. Nous pouvons appliquer l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - a| > \varepsilon) &= P(Y_n - a > \varepsilon) \\ &\leq \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E((Y_n - a)^2) &= V(Y_n - a) + (E(Y_n - a))^2 \\ &= V(Y_n) + (E(Y_n) - a)^2 \\ &= \frac{b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n^2} = 2\frac{b^2}{n^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}(E((Y_n - a)^2) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - a| > \varepsilon) = 0$ par encadrement

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ est une suite d'estimateurs de } a \text{ asymptotiquement sans biais et convergents}}$$

5)

5.1

Le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b est :

$$\begin{aligned} b_{Z_n} &= E(Z_n) - b \\ &= \frac{1}{n}E(Z_n) - E(Y_n) - b \\ &= \frac{1}{n}n(a+b) - (a+\frac{b}{n}) - b \quad \text{d'après la question 3.3.2 de la partie 3.4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le biais de } Z_n \text{ est } b_{Z_n} = -\frac{b}{n}}$$

5.2

Le risque quadratique de Z_n, en tant qu'estimateur de b est :

$$\begin{aligned} r_{Z_n}(b) &= E\Big((Z_n - b)^2\Big) \\ &= V(Z_n) + b_{Z_n}^2 = V(Z_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= V(\frac{S_n}{n} - Y_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= V(\frac{S_n}{n}) + V(Y_n) - 2\operatorname{cov}(\frac{S_n}{n}, Y_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}V(S_n) + \frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\operatorname{cov}(S_n, Y_n) + \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}(nb^2) + 2\frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\operatorname{cov}(S_n, Y_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{Z_n} = \frac{b^2}{n} + 2\frac{b^2}{n^2} - \frac{2}{n}\operatorname{cov}(S_n, Y_n)}$$

5.3

D'après les préliminaires, on a :$(\operatorname{cov}(S_n, Y_n))^2 \leq V(S_n) \times V(Y_n)$.

Or Y_n suit la loi $\mathcal{E}(a, \frac{b}{n})$ d'après la question 4., donc $V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}$ et $V(S_n) = nb^2$ d'après la question 2. Il en résulte que

$(\operatorname{cov}(S_n, Y_n))^2 \leq \frac{b^4}{n}$. Cela implique (par encadrement) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{cov}(S_n, Y_n) = 0$.

Conclusion : L'expression de r_{Z_n} permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{Z_n} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a donc : } \lim\limits_{n\to+\infty} b_{Z_n} = 0 \text{ ce qui veut dire que } (Z_n) \text{ est une} \\ \text{suite d'estimateurs de } b \text{ asymptotiquement sans biais et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0 \text{ ce qui implique que } (Z_n) \text{ est une suite} \\ \text{d'estimateurs de } b \text{ convergents.}\end{array}}$$

6)

6.1)

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) \text{ avec } f_{a,b}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \leq a \\ \frac{1}{b}\exp(-\frac{x_i - a}{b}) & \text{si } x_i \geq a \end{cases}$$

- Si $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geq a$, alors

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}\exp(-\frac{x_i - a}{b})$$
$$\frac{1}{b^n}\prod_{i=1}^{n} \exp(-\frac{x_i - a}{b})$$
$$= \frac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a))$$
$$= \frac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(\sum_{i=1}^{n} x_i - na))$$

Remarquons que la condition $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geq a$ équivaut à $\min(x_i)_{1\leq i\leq n} \geq a$

- Dans le cas contraire, $a > \min(x_i)_{1\leq i\leq n}$, alors il existe un indice $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j < a$ et dans cette condition, $f_{a,b}(x_j) = 0$, donc $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}\exp(-\frac{x_i - a}{b}) = 0$

En résumé : $L(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > \min(x_1,\ldots,x_n) \\ \frac{1}{b^n}\exp(-\frac{1}{b}(\sum_{i=1}^{n} x_i - na)) & \text{si } a \leq \min(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$

Il apparaît donc que $L(a,b) = L_n(a,b)$ pour $A = \min(x_1,\ldots,x_n)$ et $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$

6–b)

On a obtenu dans le **I)** : $a_0 = A = \min(x_1,\ldots,x_n)$ et $b_0 = \frac{S}{n} - A$.

$\min(x_1,\ldots,x_n)$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \min(x_1,\ldots,x_n)$ sont les réalisations sur l'échantillon de Y_n et de Z_n. On obtient donc les mêmes résultats.