



DENOMBREMENT 1 HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

Calculer  $A(n)$ , nombre de solutions  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$  de l'équation :  $x + 13y + z = n$ .

### Indications - dénombrement.1

On trouve  $A(n) = \frac{1}{2}(2(n+1) - 13\lfloor \frac{n}{13} \rfloor)(\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$  avec  $\lfloor x \rfloor$  égal à la partie entière de  $x$ .

## Éléments de correction : Dénombrement.1

### Calcul de $A(n)$

$x + 13y + z = n \iff x + z = n - 13y$  avec  $0 \leq y \leq \frac{n}{13}$  ou  $0 \leq y \leq \lfloor \frac{n}{13} \rfloor$  puisque  $y$  est un entier (la plus grande valeur entière inférieure ou égale à  $\frac{n}{13}$  est exactement  $\lfloor \frac{n}{13} \rfloor$ ).

Notons  $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / x + 13y + z = n\}$  et pour  $k$  fixé dans  $\llbracket 0, \lfloor \frac{n}{13} \rfloor \rrbracket$ , notons  $F_k = \{(x, k, z) \in \mathbb{N}^2 / x + 13k + z = n\}$

Alors  $E_n = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} F_k$  et les  $F_k$  sont disjoints deux à deux (en un mot la famille  $(F_k)_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{13} \rfloor}$  forme une partition de  $E_n$ ).

Pour  $k$  fixé, il y a autant de listes dans  $F_k$  que de couple  $(x, z) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $x + z = n - 13k$ .

$$\text{Donc Card}(F_k) = \binom{n - 13k + 1}{n - 13k} = \binom{n - 13k + 1}{1} = n - 13k + 1$$

$$A(n) = \text{Card}(E_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} (n + 1 - 13k)$$

La suite  $k \mapsto n + 1 - 13k$  est arithmétique, donc

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{13} \rfloor} (n + 1 - 13k) = \frac{1}{2} (n + 1 + n + 1 - 13 \lfloor \frac{n}{13} \rfloor) (\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$$

$$A(n) = \frac{1}{2} (2(n + 1) - 13 \lfloor \frac{n}{13} \rfloor) (\lfloor \frac{n}{13} \rfloor + 1)$$