



FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-7

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à valeurs dans \mathbb{R} par :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1-a) Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Déterminer les points critiques de f .

c) Quelle est la nature de ces points critiques ?

d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2-a) Montrer que pour tout $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on déterminera.

3) Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'inéquation : $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1-a)

La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* ; la fonction $x \mapsto x$ également, donc, par produit, la fonction $(x, y) \mapsto x\sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

De manière aussi simple $(x, y) \mapsto x^2 + xy + \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Puisque $x\sqrt{y} > 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut conclure :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2$$

1-b)

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} + \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{-x + y}{2y\sqrt{y}}$$

$$(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ est un point critique si et seulement si } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x^2 = \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y^2 = \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y\sqrt{y} = 1 \text{ car } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } y\sqrt{y} = 1 \iff (\sqrt{y})^3 = 1$$

$$\iff \sqrt{y} = 1 \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\iff y = 1 \quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

Il y a un unique point critique : (1, 1)

1-c)

En fait la fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: il suffit dans la démonstration précédente de changer C^1 en C^2 . On peut donc appliquer le théorème de Schwarz :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Employons les notations de Monge.

$$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3}$$

$$s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{2y\sqrt{y}}$$

$$t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{3x}{4} \frac{1}{y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{4y\sqrt{y}}$$

$$(s^2 - rt)(1, 1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

f présente au point (1, 1) un extremum local. $r(1, 1) = 2 > 0$, cet extremum est un minimum.

La fonction f présente au point (1, 1) un minimum local

1-d)

Considérons le couple $(x, 1)$ et faisons tendre x vers $+\infty$.

$$\lim_{(x,1) \rightarrow (+\infty,1)} f(x, y) = \lim_{(x,1) \rightarrow (+\infty,1)} \frac{x^2 + x + 1}{x} = +\infty.$$

La fonction f n'est pas majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

2-a)

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, g(x) = x + b + c - 3\sqrt[3]{xbc}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que fonction réciproque de la fonction cube dont la dérivée sur \mathbb{R}_+^* est strictement positive.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, g'(x) &= 1 - \frac{bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}} - bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{(bc)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - (bc)^{\frac{1}{3}})}{(xbc)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\iff x^{\frac{2}{3}} - (bc)^{\frac{1}{3}} \geq 0 \\ &\iff x^{\frac{2}{3}} \geq (bc)^{\frac{1}{3}} \\ &\iff x^2 \geq bc \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff x \geq \sqrt{bc} \quad \text{car } x > 0 \text{ et la fonction } \sqrt{} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0	\sqrt{bc}	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	\searrow	$(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$	\nearrow

Calcul de $g(\sqrt{bc})$:

$$\begin{aligned} g(\sqrt{bc}) &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{1}{2}} \times bc} \\ &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{3}{2}}} \\ &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt{bc} \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \end{aligned}$$

Donc $\forall x \geq 0, x + b + c - 3\sqrt[3]{xbc} \geq 0$, en particulier pour $x = a > 0$, d'où le résultat

$$\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \frac{a + b + c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$$

2-b)

$$f(1, 1) = 3, \text{ donc } f(x, y) - f(1, 1) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}; \text{ du signe de } x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y}.$$

D'après le résultat précédent appliqué à $a = x^2 > 0, b = xy > 0$ et $c = \sqrt{y} > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{3} &\geq (x^3(\sqrt{y})^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq x\sqrt{y} \end{aligned}$$

Donc $x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y} \geq 0$ et par conséquent $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(x, y) - f(1, 1) \geq 0$.

La fonction f présente au point $(1, 1)$ un minimum absolu

3)

$$\begin{aligned}e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y) &\iff \frac{e^{2x} + e^y}{e^{x+y}} \leq 3 - e^y \quad \text{car } e^{x+y} > 0 \\ &\iff \frac{e^{2x} + e^y + e^y \cdot e^{x+y}}{e^{x+y}} \leq 3 \\ &\iff \frac{(e^x)^2 + e^x(e^y)^2 + \sqrt{(e^y)^2}}{e^x \cdot e^y} \leq 3 \\ &\iff g(e^x, e^y) \leq 3\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $g(a, b) \geq 3$ pour tout couple (a, b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. L'inégalité $g(e^x, e^y) \leq 3$ équivaut donc à l'égalité $g(e^x, e^y) = 3$. L'étude précédente a montré que cette égalité équivaut elle-même à $e^x = e^y = 1$ puisque la fonction g possède un unique minimum au point $(1, 1)$, minimum qui vaut précisément 3.

$$e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y) \iff x = y = 0$$