FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–7

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1–a) Montrer que l'application f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Déterminer les points critiques de f.

c) Quelle est la nature de ces points critiques ?

d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2–a) Montrer que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on déterminera.

3) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $e^{2x} + e^y \leq e^{x+y}(3 - e^y)$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1–a)

La fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $x \longmapsto x$ également, donc, par produit, la fonction $(x,y) \longmapsto x\sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

De manière aussi simple $(x,y) \longmapsto x^2 + xy + \sqrt{y}$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Puisque $x\sqrt{y} > 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on peut conclure :

$$f \ : \ (x,y) \longmapsto \frac{x^2+xy+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}} \ \textbf{est de classe } C^1 \textbf{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2$$

1–b)

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} + \dfrac{1}{x}\cdot$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x}{2y\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{-x+y}{2y\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

$(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point critique si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ x^2 &= \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ y^2 &= \sqrt{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ y\sqrt{y} &= 1 \end{cases} \text{car } y \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } y\sqrt{y} = 1 &\iff (\sqrt{y})^3 = 1\\
&\iff \sqrt{y} = 1 \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\iff y = 1 \quad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

Il y a un unique point critique : $(1,1)$

1–c)

En fait la fonction f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$: il suffit dans la démonstration précédente de changer C^1 en C^2. On peut donc appliquer le théorème de Schwarz :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Employons les notations de Monge.

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &&= \frac{2}{x^3}\\
s(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &&= -\frac{1}{2y\sqrt{y}}\\
t(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &&= \frac{3x}{4}\frac{1}{y^2\sqrt{y}} - \frac{1}{4y\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

$(s^2 - rt)(1,1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$

f présente au point $(1,1)$ un extremum local. $r(1,1) = 2 > 0$, cet extremum est un minimum.

La fonction f présente au point $(1,1)$ un minimum local

1–d)

Considérons le couple $(x, 1)$ et faisons tendre x vers $+\infty$.

$$\lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} f(x,y) = \lim_{(x,1)\to(+\infty,1)} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty.$$

La fonction f n'est pas majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

2–a)

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ \ g(x) = x + b + c - 3\sqrt[3]{xbc}$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction réciproque de la fonction cube dont la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement positive.

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ g'(x) \ &= 1 - \frac{bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{x^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}} - bc}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\\ &= \frac{(bc)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - (bc)^{\frac{1}{3}})}{(xbc)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x) \geq 0 \quad &\iff x^{\frac{2}{3}} - (bc)^{\frac{1}{3}}) \geq 0\\ &\iff x^{\frac{2}{3}} \geq (bc)^{\frac{1}{3}}\\ &\iff x^2 \geq bc \quad \text{car la fonction cube est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\ &\iff x \geq \sqrt{bc} \quad \text{car } x > 0 \text{ et la fonction } \sqrt{\ } \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{bc}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$	$\nearrow$	

Calcul de $g(\sqrt{bc})$:

$$\begin{aligned}g(\sqrt{bc}) \ &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{1}{2}} \times bc}\\ &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt[3]{(bc)^{\frac{3}{2}}}\\ &= b + c + \sqrt{bc} - 3\sqrt{bc}\\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\end{aligned}$$

Donc $\forall x \geq 0,\ \ x + b + c - 3\sqrt[3]{xbc} \geq 0$, en particulier pour $x = a > 0$, d'où le résultat

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \ \frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$$

2–b)

$f(1,1) = 3$, donc $f(x,y) - f(1,1) = \dfrac{x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$; du signe de $x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y}$.

D'après le résultat précédent appliqué à $a = x^2 > 0,\ \ b = xy > 0$ et $c = \sqrt{y} > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x^2+xy+\sqrt{y}}{3} \quad &\geq (x^3(\sqrt{y})^3)^{\frac{1}{3}}\\ &\geq x\sqrt{y}\end{aligned}$$

Donc $x^2 + xy + \sqrt{y} - 3x\sqrt{y} \geq 0$ et par conséquent $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ f(x,y) - f(1,1) \geq 0$.

La fonction f présente au point $(1,1)$ un minimum absolu

3)

$$\begin{aligned} e^{2x}+e^{y}\leq e^{x+y}(3-e^{y}) &\iff \frac{e^{2x}+e^{y}}{e^{x+y}}\leq 3-e^{y} \quad \text{car } e^{x+y}>0 \\ &\iff \frac{e^{2x}+e^{y}+e^{y}.e^{x+y}}{e^{x+y}}\leq 3 \\ &\iff \frac{(e^{x})^{2}+e^{x}(e^{y})^{2}+\sqrt{(e^{y})^{2}}}{e^{x}.e^{y}}\leq 3 \\ &\iff g(e^{x},e^{y})\leq 3 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $g(a,b)\geq 3$ pour tout couple (a,b) de $(\mathbb{R}_{+}^{*})^{2}$. L'inégalité $g(e^{x},e^{y})\leq 3$ équivaut donc à l'égalité $g(e^{x},e^{y})=3$. L'étude précédente a montré que cette égalité équivaut elle-même à $e^{x}=e^{y}=1$ puisque la fonction g possède un unique minimum au point $(1,1)$, minimum qui vaut précisément 3.

$$e^{2x}+e^{y}\leq e^{x+y}(3-e^{y}) \iff x=y=0$$