POLYNOMES 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, de degré n, $(n \geq 2)$, admettant n racines réelles distinctes.

Que peut-on dire des racines de P' ?

Comparer la moyenne arithmétique des racines de P avec celle des racines de P'.

Jean MALLET

Indications - Polynômes.2

On montrera que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes ; on factorisera P et P'.
Réponse : les deux moyennes sont égales.

Eléments de correction : Polynômes.2

- Notons $x_1, \dots, x_n$ les n racines réelles de P. La fonction polynomiale $x \longmapsto P(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On applique le théorème de Rolle sur $[x_i, x_{i+1}]$. $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$; donc il existe $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\alpha_i) = 0$.

Cela donne déjà $n-1$ racines réelles distinctes de P'. Or P' est de degré $n-1$, donc il n'a pas d'autres racines.

$$P' \textbf{ admet } n-1 \textbf{ racines réelles, distinctes}$$

- Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.

On peut factoriser P : $P = a_n \sum_{k=0}^{n} (X - x_k)$. Développons maintenant pour exprimer la somme S_n des racines de P à l'aide des coefficients de P.

$$\begin{aligned} P &= a_n\Big(X^n - (x_1 + \cdots + x_n)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n x_1 \times \cdots x_n\Big) \\ &= a_n X^n - a_n S_n X^{n-1} + \cdots + a_n(-1)^n x_1 \times \cdots x_n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients (ou par unicité de la décomposition de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$), on a :

$$a_{n-1} = -a_n S_n, \text{ donc } \frac{S_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n}.$$

Procédons de la même manière pour P' et notons S'_n la somme des racines de P' :

$P' = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}$; donc

$$\begin{aligned} P' &= n a_n (X - \alpha_1) \times \cdots \times (X - \alpha_{n-1}) \\ &= n a_n\Big(X^{n-1} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{n-1}\Big) \\ &= n a_n X^{n-1} - n a_n S'_n X^{n-2} + \cdots + n a_n (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

On obtient $(n-1)a_{n-1} = -n a_n S'_n$, soit

$$\frac{S'_n}{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n} = \frac{S_n}{n} \textbf{ : les deux moyennes sont égales}$$