POLYNOMES 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, de degré n, $(n \geq 2)$, admettant n racines réelles distinctes.

Que peut-on dire des racines de P' ?

Comparer la moyenne arithmétique des racines de P avec celle des racines de P'.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Polynômes.2

On montrera que P' admet $n-1$ racines réelles distinctes ; on factorisera P et P'.
Réponse : les deux moyennes sont égales.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Polynômes.2

- Notons $x_1, \dots, x_n$ les n racines réelles de P. La fonction polynomiale $x \longmapsto P(x)$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On applique le théorème de Rolle sur $[x_i, x_{i+1}]$. $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$; donc il existe $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(\alpha_i) = 0$.

Cela donne déjà $n-1$ racines réelles distinctes de P'. Or P' est de degré $n-1$, donc il n'a pas d'autres racines.

P' admet $n-1$ racines réelles, distinctes

- Ecrivons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.

On peut factoriser P : $P = a_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (X - x_k)$. Développons maintenant pour exprimer la somme S_n des racines de P à l'aide des coefficients de P.

$$\begin{aligned} P &= a_n\Big(X^n - (x_1 + \cdots + x_n)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n x_1 \times \cdots x_n\Big) \\ &= a_n X^n - a_n S_n X^{n-1} + \cdots + a_n(-1)^n x_1 \times \cdots x_n \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients (ou par unicité de la décomposition de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$), on a :

$$a_{n-1} = -a_n S_n, \text{ donc } \frac{S_n}{n} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n}.$$

Procédons de la même manière pour P' et notons S'_n la somme des racines de P' :

$P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1}$; donc

$$\begin{aligned} P' &= n a_n (X - \alpha_1) \times \cdots \times (X - \alpha_{n-1}) \\ &= n a_n \Big(X^{n-1} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{n-1}\Big) \\ &= n a_n X^{n-1} - n a_n S'_n X^{n-2} + \cdots + n a_n (-1)^{n-1} \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

On obtient $(n-1)a_{n-1} = -n a_n S'_n$, soit

$$\frac{S'_n}{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{n a_n} = \frac{S_n}{n} \textbf{ : les deux moyennes sont égales}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021