PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−30

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, p_n \in]0;1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = k) = \binom{k+n-1}{k} p_n^n (1-p_n)^k$$

1) Vérifier que l'on définit bien une variable aléatoire.

2) Montrer que si la suite $n(1-p_n)$ converge vers un réel $\lambda > 0$, alors la suite (X_n) converge en loi.

Jean MALLET

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1)

Comme visiblement $\binom{k+n-1}{k} p_n^n(1-p_n)^k \geq 0$, il s'agit de montrer que la série de terme général $\binom{k+n-1}{k} p_n^n(1-p_n)^k$ converge et que sa somme vaut 1.

Cela utilise un résultat du cours ; rappelons brièvement comment le retrouver. On sait que $\forall x \in]-1;1[$, la série de terme général x^n converge et sa somme $S(x)$ vaut : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (c'est un des résultats fondamentaux sur la série géométrique).

On sait, toujours d'après le cours, que sur l'intervalle $]-1;1[$, la fonction S est indéfiniment dérivable et que l'on peut dériver " terme à terme " .

$\forall x \in]-1,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

Une récurrence, certainement faite en cours, a montré que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est $x \longmapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Or $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, donc $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$, d'où on obtient

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la somme posons $j = n-k$, on obtient : $\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{k} x^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{j} x^j$ d'après la symétrie des coefficients du binôme.

$$\text{Donc } \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{j} x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Appliquons ce résultat à $k = n-1$, il vient

$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+n-1}{j} x^j = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k.$

Appliquons ce résultat à $x = 1-p_n$ qui appartient bien à $]-1;1[$.

$\frac{1}{(p_n)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k$, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n = 1}$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k) = 1}$

2)

Déterminons $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n$.

$$\begin{aligned}\binom{k+n-1}{k} (1-p_n)^k p_n^n &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p_n^n (1-p_n)^k \\ &= \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} p_n^n (1-p_n^n)^k\end{aligned}$$

Au voisinage de $+\infty$, $(k+n-1)(k+n-2)\dots n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n^k$ car on a le produit de k équivalents à n. Donc

$$\frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{n^k}{k!}. \qquad \textbf{(1)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-p_n)=\lambda>0 \Longrightarrow (1-p_n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$, donc

$$(1-p_n)^k \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k}. \qquad \textbf{(2)}$$

$p_n^n=\exp(n\ln p_n)=\exp(n\ln(1+p_n-1)$. Or $(1-p_n) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(1-p_n)=0.$

Il en résulte que $n\ln(1+p_n-1) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n(p_n-1) \underset{(n\to+\infty)}{\sim} -\lambda.$

Partant de là, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln p_n=-\lambda$, donc par continuité de l'exponentielle au point $-\lambda$, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(n\ln p_n)=\exp(-\lambda)$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n^n=\exp(-\lambda)$, ce qui implique

$$p_n^n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \exp(-\lambda) \qquad \textbf{(3)}$$

En conclusion : les points (1), (2) et (3) permettent de conclure

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!}p_n^n(1-p_n^n)^k=\exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{n^k},\\ \text{Donc }\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_n=k)=\exp(-\lambda)\dfrac{\lambda^k}{n^k}.\\ \text{La suite }(X_n)\text{ converge en loi vers une variable qui suit}\\ \text{la loi de Poisson de paramètre }\lambda\end{array}}$$