



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–29

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a invité n personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle "auditoire" l'ensemble des personnes qui viennent. On suppose que tous les auditoires comportant le même nombre de personnes sont équiprobables. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note p_k la probabilité de chacun des auditoires comportant k personnes. On suppose aussi que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, un auditoire de k personnes est k fois plus probable qu'un auditoire d'une personne, c'est-à-dire que $p_k = kp_1$.

- 1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?
- 2) Montrer que $p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$. Déterminer la loi du nombre X , aléatoire, de personnes qui viennent.
- 3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?
- 4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.
- 5) Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle comportant exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chance de trouver un siège que les personnes invitées.

Déterminer la probabilité q_n que cette personne reste debout et déterminer un équivalent simple de q_n quand n tend vers $+\infty$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1) _____

Il y a autant d'auditoires possibles que de parties de l'ensemble des n personnes invitées, c'est-à-dire 2^n .

Le nombre d'auditoires comportant k personnes vaut $\binom{n}{k}$.

2) _____

• $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$. D'après l'énoncé $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p_k = kp_1$; or p_k est la probabilité commune de tous les auditoires de k personnes, donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p_k$.

On obtient donc $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} kp_1 = 1$. Ce qui équivaut à $p_1 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = 1$. La somme est connue et vaut $n2^{n-1}$.

$$p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$$

Remarque : pour les étudiants qui ne connaîtraient " plus " cette somme, il suffit d'envisager une variable T qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$; pour tout

$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(T = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$ et $E(T) = \frac{n}{2}$. Or $E(T) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$.

L'égalité $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$ donne le résultat.

• $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = k \binom{n}{k} p_k = \frac{k}{n2^{n-1}} \binom{n}{k}$.

Remarque : en fait $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ puisque $P(X = 0) = 0$. Pour $k \neq 0$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et on peut donc dire :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$$

3) _____

Soit a une personne donnée. L'événement A " la personne a est présente " est l'événement " il a un auditoire dans lequel figure a ".

Si nous notons $k \geq 1$ le cardinal d'un auditoire qui contient a , le nombre d'auditoires de k personnes qui contiennent a est $\binom{n-1}{k-1}$ (nombre façons de choisir $k-1$ personnes parmi les autres que a et d'ajouter a).

Ce nombre est le cardinal de l'événement A_k : " la personne a est dans un auditoire de k personnes, $1 \leq k \leq n$ ". Chaque auditoire de cardinal k est de probabilité p_k , donc $P(A_k) = \binom{n-1}{k-1} p_k$.

Il est clair que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, événements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p_k \\
 &= p_1 \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} \quad \text{on pose } j = k - 1 \\
 &= p_1 \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} \\
 &= p_1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \right) \\
 &= p_1 \left((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \right) \\
 P(A) &= \frac{2^{n-2}(n+1)}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}.
 \end{aligned}$$

4)

Soit a et b deux personnes différentes.

Notons à nouveau A : " l'invité a est présent " et B : " l'invité b est présent ".

Par la même démarche que dans la question précédente

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p_k \\
 &= p_1 \sum_{k=2}^n k \binom{n-2}{k-2} \quad \text{on pose } j = k - 2 \\
 &= p_1 \sum_{j=0}^{n-2} (j+2) \binom{n-2}{j} \\
 &= p_1 \left((n-2)2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-2} \right) \\
 &= p_1 (n+2)2^{n-3}
 \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n+2}{4n}$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A)P(B) = P(A \cap B)$, donc si et seulement si $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n+2}{4n}$, soit $(n+1)^2 = n(n+2)$, ce qui est impossible.

Les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.

5)

Soit c la personne non invitée qui décide de venir et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons S_k l'événement " la salle contient k places exactement " ce qui veut dire que k personnes exactement ont signé qu'elles venaient. Notons C l'événement : " la personne c reste debout ".

La famille $(S_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc, par la formule des probabilités totales, $P(C) = \sum_{k=1}^n P(S_k)P_{S_k}(C)$

$P(S_k) = p_1 k \binom{n}{k}$ car l'événement S_k est " l'auditoire comporte k " personnes et $P_{S_k}(C) = \frac{1}{k+1}$ car c'est comme s'il y avait $k+1$ places dont une " mauvaise ".

$$P(C) = p_1 \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k \times n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{k \times (n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k+1} \quad \text{on pose } j = k+1 \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) \binom{n+1}{j} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (j-1) \binom{n+1}{j} \quad (\text{le terme pour } j=1 \text{ est nul}) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} j \binom{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left((n+1)2^n - \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left((n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left((n-1)2^n + 1 \right) \end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n(n+1)2^{n-1}}$$

- $P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n2^n}{n^2 2^{n-1}}$;

$$P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}$$