PROBABLITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–29

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a invité n personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle " auditoire " l'ensemble des personnes qui viennent. On suppose que tous les auditoires comportant le même nombre de personnes sont équiprobables. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on note p_k la probabilité de chacun des auditoires comportant k personnes. On suppose aussi que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, un auditoire de k personnes est k fois plus probable qu'un auditoire d'une personne, c'est-à-dire que $p_k = kp_1$.

1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?

2) Montrer que $p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$. Déterminer la loi du nombre X, aléatoire, de personnes qui viennent.

3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.

5) Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle comportant exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chance de trouver un siège que les personnes invitées.

Déterminer la probabilité q_n que cette personne reste debout et déterminer un équivalent simple de q_n quand n tend vers $+\infty$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1)

Il y a autant d'auditoires possibles que de parties de l'ensemble des n personnes invitées, c'est-à-dire 2^n.

Le nombre d'auditoires comportant k personnes vaut $\binom{n}{k}$.

2)

- $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, donc $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$. D'après l'énoncé $\forall k \in [\![0,n]\!],\ p_k = kp_1$; or p_k est la probabilité commune de tous les auditoires de k personnes, donc $P(X=k) = \binom{n}{k} p_k$.

On obtient donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kp_1 = 1$. Ce qui équivaut à $p_1 \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 1$. La somme est connue et vaut $n2^{n-1}$.

$$p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$$

Remarque : pour les étudiants qui ne connaîtraient " plus " cette somme, il suffit d'envisager une variable T qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$; pour tout $k \in [\![0,n]\!],\ P(T=k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$ et $E(T) = \frac{n}{2}$. Or $E(T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} k\binom{n}{k}$.

L'égalité $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} k\binom{n}{k}$ donne le résultat.

- $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = k\binom{n}{k} p_k = \frac{k}{n2^{n-1}}\binom{n}{k}.$$

Remarque : en fait $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ puisque $P(X=0) = 0$. Pour $k \neq 0$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et on peut donc dire :

$X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$

3)

Soit a une personne donnée. L'événement A " la personne a est présente " est l'événement " il a un auditoire dans lequel figure a.

Si nous notons $k \geq 1$ le cardinal d'un auditoire qui contient a, le nombre d'auditoires de k personnes qui contiennent a est $\binom{n-1}{k-1}$ (nombre façons de choisir $k-1$ personnes parmi les autres que a et d'ajouter a).

Ce nombre est le cardinal de l'événement A_k : " la personne a est dans un auditoire de k personnes, $1 \leq k \leq n$ ". Chaque auditoire de cardinal k est de probabilité p_k, donc $P(A_k) = \binom{n-1}{k-1} p_k$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Il est clair que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, événements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_k \\
&= p_1 \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{on pose } j = k-1 \\
&= p_1 \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} \\
&= p_1 \Big(\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \Big) \\
&= p_1 \Big((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \Big)
\end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{2^{n-2}(n+1)}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}.$$

4)

Soit a et b deux personnes différentes.

Notons à nouveau A : " l'invité a est présent " et B : " l'invité b est présent ".

Par la même démarche que dans la question précédente

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p_k \\
&= p_1 \sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2} \qquad \text{on pose } j = k-2 \\
&= p_1 \sum_{j=0}^{n-2} (j+2) \binom{n-2}{j} \\
&= p_1 \Big((n-2)2^{n-3} + 2.2^{n-2} \Big) \\
&= p_1 (n+2) 2^{n-3}
\end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n+2}{4n}$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A)P(B) = P(A \cap B)$, donc si et seulement si $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n+2}{4n}$, soit $(n+1)^2 = n(n+2)$, ce qui est impossible.

Les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.

5)

Soit c la personne non invitée qui décide de venir et pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons S_k l'événement " la salle contient k places exactement " ce qui veut dire que k personnes exactement ont signifé qu'elles venaient. Notons C l'événement : " la personne c reste debout ".

La famille $(S_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements, donc, par la formule des probabilités totales, $P(C) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k) P_{S_k}(C)$

$P(S_k) = p_1 k \binom{n}{k}$ car l'événement S_k est " l'auditoire comporte k " personnes et $P_{S_k}(C) = \frac{1}{k+1}$ car c'est comme s'il y avait $k+1$ places dont une " mauvaise ".

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$P(C) \quad = p_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{k \times n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{k \times n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{k \times (n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{k}{n+1}\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{on pose } j = k+1 \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1} (j-1)\binom{n+1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\underline{j=1}}^{n+1} (j-1)\binom{n+1}{j} \qquad \text{(le terme pour } j=1 \text{ est nul)} \\
&= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{n+1} j\binom{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Big) \\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n+1)2^n - \sum_{\underline{j=0}}^{n+1}\binom{n+1}{j} + 1\Big) \\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n+1)2^n - 2^{n+1} + 1\Big) \\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n-1)2^n + 1\Big)
\end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{(n-1)2^n + 1}{n(n+1)2^{n-1}}.$$

- $P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n2^n}{n^2 2^{n-1}}$;

$$P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021