PROBABLITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–29

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1. On a invité n personnes à une conférence mais certains invités ne pourront pas venir ; on appelle " auditoire " l'ensemble des personnes qui viennent. On suppose que tous les auditoires comportant le même nombre de personnes sont équiprobables. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note p_k la probabilité de chacun des auditoires comportant k personnes. On suppose aussi que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, un auditoire de k personnes est k fois plus probable qu'un auditoire d'une personne, c'est-à-dire que $p_k = kp_1$.

1) Combien y a-t-il d'auditoires différents possibles ? Combien comportent k personnes ?

2) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{n2^{n-1}}\cdot$ Déterminer la loi du nombre X, aléatoire, de personnes qui viennent.

3) Quelle est la probabilité qu'un invité donné soit bien présent ?

4) Montrer que, avec cette modélisation, les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.

5) Les invités qui viendront ont prévenu le conférencier qui a réservé une salle comportant exactement le bon nombre de sièges. Une personne qui n'était pas invitée décide de venir aussi ; elle a autant de chance de trouver un siège que les personnes invitées.

Déterminer la probabilité q_n que cette personne reste debout et déterminer un équivalent simple de q_n quand n tend vers $+\infty$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1)

Il y a autant d'auditoires possibles que de parties de l'ensemble des n personnes invitées, c'est-à-dire 2^n.

Le nombre d'auditoires comportant k personnes vaut $\binom{n}{k}$.

2)

- $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$. D'après l'énoncé $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = kp_1$; or p_k est la probabilité commune de tous les auditoires de k personnes, donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p_k$.

On obtient donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kp_1 = 1$. Ce qui équivaut à $p_1 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = 1$. La somme est connue et vaut $n2^{n-1}$.

$$p_1 = \frac{1}{n2^{n-1}}$$

Remarque : pour les étudiants qui ne connaîtraient " plus " cette somme, il suffit d'envisager une variable T qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$; pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(T = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$ et $E(T) = \frac{n}{2}$. Or $E(T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$.

L'égalité $\frac{n}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} k \binom{n}{k}$ donne le résultat.

- $$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = k \binom{n}{k} p_k = \frac{k}{n2^{n-1}} \binom{n}{k}.$$

Remarque : en fait $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ puisque $P(X = 0) = 0$. Pour $k \neq 0$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et on peut donc dire :

$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k-1}$

3)

Soit a une personne donnée. L'événement A " la personne a est présente " est l'événement " il a un auditoire dans lequel figure a.

Si nous notons $k \geq 1$ le cardinal d'un auditoire qui contient a, le nombre d'auditoires de k personnes qui contiennent a est $\binom{n-1}{k-1}$ (nombre façons de choisir $k-1$ personnes parmi les autres que a et d'ajouter a).

Ce nombre est le cardinal de l'événement A_k : " la personne a est dans un auditoire de k personnes, $1 \leq k \leq n$ ". Chaque auditoire de cardinal k est de probabilité p_k, donc $P(A_k) = \binom{n-1}{k-1} p_k$.

Il est clair que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, événements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_k \\ &= p_1 \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{on pose } j = k-1 \\ &= p_1 \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \binom{n-1}{j} \\ &= p_1 \Big(\sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \Big) \\ &= p_1 \Big((n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} \Big) \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{2^{n-2}(n+1)}{n2^{n-1}} = \frac{n+1}{2n}.$$

4)

Soit a et b deux personnes différentes.

Notons à nouveau A : " l'invité a est présent " et B : " l'invité b est présent ".

Par la même démarche que dans la question précédente

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p_k \\ &= p_1 \sum_{k=2}^{n} k \binom{n-2}{k-2} \qquad \text{on pose } j = k-2 \\ &= p_1 \sum_{j=0}^{n-2} (j+2) \binom{n-2}{j} \\ &= p_1 \Big((n-2)2^{n-3} + 2.2^{n-2} \Big) \\ &= p_1 (n+2)2^{n-3} \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n+2}{4n}$$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A)P(B) = P(A \cap B)$, donc si et seulement si $\left(\frac{n+1}{2n}\right)^2 = \frac{n+2}{4n}$, soit $(n+1)^2 = n(n+2)$, ce qui est impossible.

Les événements " l'invité a est présent " et " l'invité b est présent " ne sont pas indépendants.

5)

Soit c la personne non invitée qui décide de venir et pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons S_k l'événement " la salle contient k places exactement " ce qui veut dire que k personnes exactement ont signifié qu'elles venaient. Notons C l'événement : " la personne c reste debout ".

La famille $(S_k)_{1 \le k \le n}$ est un système complet d'événements, donc, par la formule des probabilités totales, $P(C) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k) P_{S_k}(C)$

$P(S_k) = p_1 k \binom{n}{k}$ car l'événement S_k est " l'auditoire comporte k " personnes et $P_{S_k}(C) = \frac{1}{k+1}$ car c'est comme s'il y avait $k+1$ places dont une " mauvaise ".

$$P(C) \quad = p_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{k\times n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{k\times n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{k\times(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{k}{n+1}\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{on pose } j=k+1\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)\binom{n+1}{j}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{\underline{j=1}}^{n+1}(j-1)\binom{n+1}{j} \qquad \text{(le terme pour } j=1 \text{ est nul)}\\
&= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{n+1} j\binom{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Big)\\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n+1)2^n - \sum_{\underline{j=0}}^{n+1}\binom{n+1}{j} + 1\Big)\\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n+1)2^n - 2^{n+1} + 1\Big)\\
&= \frac{1}{n+1}\Big((n-1)2^n + 1\Big)
\end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{(n-1)2^n+1}{n(n+1)2^{n-1}}.$$

- $P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{n2^n}{n^2 2^{n-1}}$;

$$P(C) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}.$$