PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−28

Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes. On suppose en outre que, pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$ la variable X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i / $p_i \in]0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Déterminer les paramètres p_i pour que la variance $V(S_n)$ soit maximale si l'on impose la contrainte : l'espérance $E(S_n)$ de S_n est égale à a.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 28

- Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et par indépendance des variables X_i,

$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$.

Nous allons donner trois méthodes pour arriver au résultat.

$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_i^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = a - \sum_{i=1}^{n} p_i^2$

$V(S_n)$ **sera maximale si et seulement si** $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ **est minimale.**

Première méthode : récurrence sur n

- $n = 2$. On a le système $\begin{cases} p_1 + p_2 & = a \\ p_1^2 + p_2^2 & = V(S_2) \end{cases}$

$p_1^2 + p_2^2 = p_1^2 + (a - p_1)^2 = 2p_1^2 - 2ap_1 + a^2$.

Etudions f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2$. $\forall x \in [0;1]$, $f'(x) = 4x - 2a = 2(2x - a)$.
On a sans problème le tableau de variations :

x	0	$\frac{a}{2}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

La fonction f est minimale au point $\frac{a}{2}$. Donc $p_1^2 + p_2^2$ est minimale pour $p_1 = \frac{a}{2}$; ce qui donne $p_2 = p_1 = \frac{a}{2}$.

- Hérédité : supposons que, lorsqu'il existe $b \geq 0$ / $\sum_{i=1}^{n} p_i = b$, la somme $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ est minimale pour $p_1 = \cdots = p_n = \frac{b}{n}$.

Pour $n+1$. Soit $a \geq 0$.

On a l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = a$ ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^{n} p_i = a - p_{n+1} = b \geq 0$.

$\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + p_{n+1}^2$. Le nombre p_{n+1} ne dépend pas des p_i / $1 \leq i \leq n$, on peut le considérer comme une constante par rapport à ces nombres.

$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + p_{n+1}^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ le sera. D'après l'hypothèse de récurrence, cela se fera pour $p_1 = \ldots = p_{n-1} = \frac{b}{n} = \frac{a - p_{n+1}}{n}$.

Ce minimum vaudra

$$\begin{aligned} n\Big(\frac{a-p_{n+1}}{n}\Big)^2+p_{n+1}^2 &= \frac{1}{n}\Big((n+1)p_{n+1}^2-2ap_{n+1}+a^2\Big)\\ &= \frac{n+1}{n}\Big(p_{n+1}^2-2\frac{a}{n+1}p_{n+1}+\frac{a^2}{n+1}\Big)\\ &= \frac{n+1}{n}\Big((p_{n+1}-\frac{a}{n+1})^2-\frac{4a^2}{(n+1)^2}+\frac{a^2}{n+1}\Big)\end{aligned}$$

Ce minimum sera lui-même minimum quand $p_{n+1}=\frac{a}{n+1}$. Il en résultera que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ p_i=\dfrac{a-\frac{a}{n+1}}{n}=\dfrac{a}{n+1}$.

La proposition est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout entier $n\geq 2$.

Deuxième méthode : directement

On a constaté que pour $n=2$, $\sum_{i=1}^{2}p_i^2$ était minimale pour $p_1=p_2=\frac{a}{2}$.

Montrons directement que pour $\sum_{i=1}^{n}p_i=a$, la somme $\sum_{i=1}^{n}p_i^2$ est maximale pour $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{a}{n}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}p_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n}+\tfrac{a}{n})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n})+\sum_{i=1}^{n}(\tfrac{a}{n})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{n}\tfrac{a}{n})\Big)+\frac{a^2}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\Big(a-a)+\frac{a^2}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\tfrac{a}{n})^2+\frac{a^2}{n}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^2\geq\frac{a^2}{n}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n}p_i^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2$ sera nulle, ce qui équivaut à $p_i-\frac{a}{n}=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Troisième méthode : avec une fonction de n-1 variables

$\sum_{i=1}^{n}p_i^2=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+p_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+(a-\sum_{i=1}^{n-1}p_i)^2.$

Posons $f(p_1,\ldots,p_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+(a-\sum_{i=1}^{n-1}p_i)^2.$

C'est une fonction polynomiale des variables $p_1,\ldots,p_{n-1}$, elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{n-1}$

- Recherche des points critiques.

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \ldots, p_{n-1}) = 2p_j - 2(a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)$

Posons $s = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$; alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \ldots, p_{n-1}) = 2p_j - 2(a - s)$ et

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0 \Longleftrightarrow p_j - (a - s) = 0$, c'est-à-dire $p_j = a - s$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$.

Sommons ces égalités pour $1 \leq j \leq n-1$, il vient $s = (n-1)a - (n-1)s$, donc $s = \frac{n-1}{n}a\cdot$

De là on déduit : $p_j = a - s = \frac{a}{n}\cdot$ puis $p_n = \frac{a}{n}$ puisque $p_n = a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = a - s$.

S'il y a un point critique, il est unique et vaut $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$

On vérifie facilement que ce point est effectivement critique car, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$\frac{a}{n} - (a - (n-1)\frac{a}{n}) = n\frac{a}{n} - a = 0.$

- Recherche d'un extremum.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, posons $p_i = \frac{a}{n} + h_i$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} h_i$.

$$\begin{aligned}
f(p_1, \ldots, p_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{a}{n} + h_i)^2 + (a - \sum_{i=1}^{n-1}(\frac{a}{n} + h_i))^2 \\
&= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + (\frac{a}{n} - \sigma)^2 \\
&= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \frac{a^2}{n^2} - \frac{2a}{n}\sigma + \sigma^2 \\
&= \frac{a^2}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2
\end{aligned}$$

Remarquons que $f(p_1, \ldots, p_{n-1}) = \frac{a^2}{n^2}$ lorsque l'on est au point critique ; l'égalité précédente s'écrit :

$$f(\frac{a}{n} + h_1, \ldots, \frac{a}{n} + h_{n-1}) = f(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2,$$

donc

$$(\frac{a}{n} + h_1, \ldots, \frac{a}{n} + h_{n-1}) \geq (\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ présente un minimum absolu au point } (\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})}$$