# PROBABILITES DISCRETES

## ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE–28**

Soit $X_1, \ldots, X_n$, $n$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes. On suppose en outre que, pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$ la variable $X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i$ / $p_i \in ]0, 1[$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Déterminer les paramètres $p_i$ pour que la variance $V(S_n)$ soit maximale si l'on impose la contrainte : l'espérance $E(S_n)$ de $S_n$ est égale à $a$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 28

- Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et par indépendance des variables $X_i$,

$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$.

Nous allons donner trois méthodes pour arriver au résultat.

$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n}(p_i - p_i^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = a - \sum_{i=1}^{n} p_i^2$

**$V(S_n)$ sera maximale si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ est minimale.**

## Première méthode : récurrence sur n

- $n = 2$. On a le système $\begin{cases} p_1 + p_2 & = a \\ p_1^2 + p_2^2 & = V(S_2) \end{cases}$

$p_1^2 + p_2^2 = p_1^2 + (a-p_1)^2 = 2p_1^2 - 2ap_1 + a^2$.

Etudions $f$ définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2$. $\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 4x - 2a = 2(2x-a)$.
On a sans problème le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $\frac{a}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

La fonction $f$ est minimale au point $\frac{a}{2}$. Donc $p_1^2 + p_2^2$ est minimale pour $p_1 = \frac{a}{2}$ ; ce qui donne $p_2 = p_1 = \frac{a}{2}$.

- Hérédité : supposons que, lorsqu'il existe $b \geq 0$ / $\sum_{i=1}^{n} p_i = b$, la somme $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ est minimale pour $p_1 = \cdots = p_n = \frac{b}{n}$.

Pour $n+1$. Soit $a \geq 0$.

On a l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = a$ ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^{n} p_i = a - p_{n+1} = b \geq 0$.

$\sum_{i=1}^{n+1} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + p_{n+1}^2$. Le nombre $p_{n+1}$ ne dépend pas des $p_i$ / $1 \leq i \leq n$, on peut le considérer comme une constante par rapport à ces nombres.

$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + p_{n+1}^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^{n} p_i^2$ le sera. D'après l'hypothèse de récurrence, cela se fera pour $p_1 = \ldots = p_{n-1} = \frac{b}{n} = \frac{a - p_{n+1}}{n}$.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ce minimum vaudra

$$\begin{aligned} n\Big(\frac{a-p_{n+1}}{n}\Big)^2+p_{n+1}^2 &= \frac{1}{n}\Big((n+1)p_{n+1}^2-2ap_{n+1}+a^2\Big)\\ &= \frac{n+1}{n}\Big(p_{n+1}^2-2\frac{a}{n+1}p_{n+1}+\frac{a^2}{n+1}\Big)\\ &= \frac{n+1}{n}\Big((p_{n+1}-\frac{a}{n+1})^2-\frac{4a^2}{(n+1)^2}+\frac{a^2}{n+1}\Big)\end{aligned}$$

Ce minimum sera lui-même minimum quand $p_{n+1}=\frac{a}{n+1}$. Il en résultera que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ p_i=\dfrac{a-\frac{a}{n+1}}{n}=\frac{a}{n+1}$.

La proposition est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est satisfaite pour tout entier $n\geq 2$.

**Deuxième méthode : directement**

On a constaté que pour $n=2$, $\sum_{i=1}^{2}p_i^2$ était minimale pour $p_1=p_2=\frac{a}{2}$.

Montrons directement que pour $\sum_{i=1}^{n}p_i=a$, la somme $\sum_{i=1}^{n}p_i^2$ est maximale pour $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{a}{n}$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}p_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n}+\frac{a}{n})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})+\sum_{i=1}^{n}(\frac{a}{n})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n})\Big)+\frac{a^2}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2+\frac{2a}{n}\Big(a-a\Big)+\frac{a^2}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2+\frac{a^2}{n}\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^2\geq\frac{a^2}{n}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n}p_i^2$ sera minimale lorsque $\sum_{i=1}^{n}(p_i-\frac{a}{n})^2$ sera nulle, ce qui équivaut à $p_i-\frac{a}{n}=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

**Troisième méthode : avec une fonction de n-1 variables**

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^2=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+p_n^2=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+(a-\sum_{i=1}^{n-1}p_i)^2.$$

Posons $f(p_1,\ldots,p_{n-1})=\sum_{i=1}^{n-1}p_i^2+(a-\sum_{i=1}^{n-1}p_i)^2$.

C'est une fonction polynomiale des variables $p_1,\ldots,p_{n-1}$, elle est donc de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- Recherche des points critiques.

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1,\dots,p_{n-1}) = 2p_j - 2(a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i)$

Posons $s = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$ ; alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1,\dots,p_{n-1}) = 2p_j - 2(a-s)$ et

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_1,\dots,p_{n-1}) = 0 \iff p_j - (a-s) = 0$, c'est-à-dire $p_j = a - s$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$.

Sommons ces égalités pour $1 \leq j \leq n-1$, il vient $s = (n-1)a - (n-1)s$, donc $s = \frac{n-1}{n}a$.

De là on déduit : $p_j = a - s = \frac{a}{n}$. puis $p_n = \frac{a}{n}$ puisque $p_n = a - \sum_{i=1}^{n-1} p_i = a - s$.

S'il y a un point critique, il est unique et vaut $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$

On vérifie facilement que ce point est effectivement critique car, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$\frac{a}{n} - (a - (n-1)\frac{a}{n}) = n\frac{a}{n} - a = 0.$

- Recherche d'un extremum.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, posons $p_i = \frac{a}{n} + h_i$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} h_i$.

$$\begin{aligned} f(p_1,\dots,p_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1}(\tfrac{a}{n}+h_i)^2 + (a - \sum_{i=1}^{n-1}(\tfrac{a}{n}+h_i))^2 \\ &= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + (\tfrac{a}{n} - \sigma)^2 \\ &= \frac{n-1}{n^2}a^2 + \frac{2a}{n}\sigma + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \frac{a^2}{n^2} - \frac{2a}{n}\sigma + \sigma^2 \\ &= \frac{a^2}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

Remarquons que $f(p_1,\dots,p_{n-1}) = \frac{a^2}{n^2}$ lorsque l'on est au point critique ; l'égalité précédente s'écrit :

$$f(\tfrac{a}{n}+h_1,\dots,\tfrac{a}{n}+h_{n-1}) = f(\tfrac{a}{n},\dots,\tfrac{a}{n}) + \sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \sigma^2,$$

donc

$$(\tfrac{a}{n}+h_1,\dots,\tfrac{a}{n}+h_{n-1}) \geq (\tfrac{a}{n},\dots,\tfrac{a}{n})$$

La fonction $f$ présente un minimum absolu au point $(\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n})$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021