# INTEGRALES IMPROPRES.4. HEC.ESCP

## ENONCE DE L'EXERCICE

**ENONCE–4**

Convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) dx$


**Jean MALLET**
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**Eléments de correction : 4.**

- **Convergence de l'intégrale**

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ pour $x \in ]0;1[$.

La fonction $f$ est continue sur $]0;1[$. En effet,

la fonction $x \longmapsto 1-x$ est continue sur $]0;1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]0;1[$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0;1[$, donc $x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ est continue sur $]0;1[$.

Il est alors clair que $f$ est continue sur $]0;1[$ puisque $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est.

**L'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ est impropre en $0$ et en $1$.**

- **Etude en $0$.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} &= \frac{1}{x} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Rappelons peut-être que $o(x^2) = x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc

$\frac{o(x^2)}{x^2} = \varepsilon(x) = x^0\varepsilon(x) = o(1)$. En tout état de cause, $\lim\limits_{x\to 0} o(1) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ : $f$ est prolongeable par continuité en $0$,

**l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ est faussement impropre, donc convergente.**

- **Etude en $1$.**

Le problème vient de $\frac{\ln(1-x)}{x^2}$ puisque l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé).

$\frac{\ln(1-x)}{x^2} \underset{(1)}{\sim} \ln(1-x)$. L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ converge : en effet,

effectuons le changement de variable $u = 1-x$, qui est $C^1$ bijectif sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on obtient $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln u du$. Cette dernière intégrale est convergente car la fonction $\ln$ est une fonction de référence en $0$ dont l'intégrale converge.

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ converge, donc par équivalence des fonctions continues de signe constant l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx$ converge.

**Conclusion : l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ est convergente.**


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Les deux intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ convergent donc

**l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente**

- **Calcul de l'intégrale**

Soit $(a,b) \in (]0;1[)^2$ tel que $a<b$.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_a^b (\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2})dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x}dx + \int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx \\ &= \ln|b| - \ln|a| + \underbrace{\int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx}_{=J(a,b)} \end{aligned}$$

Dans l'intégrale $J(a,b)$, faisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(1-x) \quad &\Longrightarrow u'(x) = -\frac{1}{1-x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad &\Longleftarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[a,b]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} J(a,b) &= \big[-\frac{\ln(1-x)}{x}\big]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \underbrace{\int_a^b \frac{dx}{x(1-x)}}_{=K(a,b)} \end{aligned}$$

◁ **Calcul de $K(a,b)$.**

Décomposons $\frac{1}{x(1-x)}$ en une somme ; la technique est maintenant classique car maintes fois utilisée. On cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x}$. On réduit au même dénominateur et on obtient $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(\beta-\alpha)x+\alpha}{x(1-x)}$.

Les réels $\alpha$ et $\beta$ sont solutions du système : $\begin{cases} \beta-\alpha &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement $\alpha=\beta=1$, donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} &= \int_a^b (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x}dx + \int_a^b \frac{1}{1-x}dx \\ &= \big[\ln|x|\big]_a^b - \big[\ln|1-x|\big]_a^b \\ K(a,b) &= \ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(a,b) &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \Big(\ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a)\Big) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \ln b - \ln a + J(a,b) \\ &= \ln b - \ln a - \frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a)) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Il est clair que $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2})dx = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} J(a,b)$.

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln(1-a) = -1+0 = -1$ car $\ln(1-a) \underset{(0)}{\sim} -a$.

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-} \Big(-\frac{\ln(1-b)}{b}+\ln(1-b)\Big) &= \lim_{b\to 1^-} \frac{(b-1)\ln(1-b)}{b}\\ &= \lim_{b\to 1^-} -\frac{(1-b)\ln(1-b)}{b}\\ &= 0 \quad \text{car par croissances comparées}\\ &\qquad \lim_{b\to 1^-} (1-b)\ln(1-b) = 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} I(a,b) = -1+0 = -1$

$$\boxed{\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} I(a,b) = -1 \text{ veut dire } \int_0^1 (\frac{1}{x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2})dx = -1}$$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021