INTEGRALES IMPROPRES.4. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–4

Convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right)dx$

Eléments de correction : 4.

- **Convergence de l'intégrale**

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ pour $x \in]0;1[$.

La fonction f est continue sur $]0;1[$. En effet,

la fonction $x \longmapsto 1-x$ est continue sur $]0;1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]0;1[$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0;1[$, donc $x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ est continue sur $]0;1[$. Il est alors clair que f est continue sur $]0;1[$ puisque $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est.

L'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ est impropre en 0 et en 1.

- **Etude en 0.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} &= \frac{1}{x} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

Rappelons peut-être que $o(x^2) = x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, donc

$\frac{o(x^2)}{x^2} = \varepsilon(x) = x^0\varepsilon(x) = o(1)$. En tout état de cause, $\lim_{x\to 0} o(1) = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2} : f \text{ est prolongeable par continuité en } 0,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ est faussement impropre, donc convergente.

- **Etude en 1.**

Le problème vient de $\frac{\ln(1-x)}{x^2}$ puisque l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé).

$\frac{\ln(1-x)}{x^2} \underset{(1)}{\sim} \ln(1-x)$. L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ converge : en effet,

effectuons le changement de variable $u = 1-x$, qui est C^1 bijectif sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on obtient $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln u du$. Cette dernière intégrale est convergente car la fonction $\ln$ est une fonction de référence en 0 dont l'intégrale converge.

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ converge, donc par équivalence des fonctions continues de signe constant l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx$ converge.

Conclusion : l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ est convergente.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les deux intégrales } \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \text{ convergent donc} \\ \textbf{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \textbf{ est convergente}\end{array}}$$

- **Calcul de l'intégrale**

Soit $(a,b) \in (]0;1[)^2$ tel que $a < b$.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_a^b (\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2})dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x}dx + \int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx \\ &= \ln|b| - \ln|a| + \underbrace{\int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2}dx}_{=J(a,b)} \end{aligned}$$

Dans l'intégrale $J(a,b)$, faisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(1-x) \quad &\Longrightarrow u'(x) = -\frac{1}{1-x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \quad &\Longleftarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a,b]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} J(a,b) &= [-\frac{\ln(1-x)}{x}]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \underbrace{\int_a^b \frac{dx}{x(1-x)}}_{=K(a,b)} \end{aligned}$$

◃ **Calcul de $K(a,b)$.**

Décomposons $\dfrac{1}{x(1-x)}$ en une somme ; la technique est maintenant classique car maintes fois utilisée. On cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ / $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{1-x}$. On réduit au même dénominateur et on obtient $\dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{(\beta-\alpha)x+\alpha}{x(1-x)}$.

Les réels α et β sont solutions du système : $\begin{cases} \beta - \alpha &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement $\alpha = \beta = 1$, donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} &= \int_a^b (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x}dx + \int_a^b \frac{1}{1-x}dx \\ &= \big[\ln|x|\big]_a^b - \big[\ln|1-x|\big]_a^b \\ K(a,b) &= \ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(a,b) &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \Big(\ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a)\Big) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \ln b - \ln a + J(a,b) \\ &= \ln b - \ln a - \frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a)) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$

Il est clair que $\displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2})dx = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} J(a,b)$.

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln(1-a) = -1 + 0 = -1$ car $\ln(1-a) \underset{(0)}{\sim} -a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 1^-} \Big(-\frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b)\Big) &= \lim_{b\to 1^-} \frac{(b-1)\ln(1-b)}{b} \\
&= \lim_{b\to 1^-} -\frac{(1-b)\ln(1-b)}{b} \\
&= 0 \quad \text{car par croissances comparées} \\
&\quad \lim_{b\to 1^-} (1-b)\ln(1-b) = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} I(a,b) = -1 + 0 = -1$

$$\boxed{\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} I(a,b) = -1 \text{ veut dire } \int_0^1 (\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2})dx = -1}$$