



INTEGRALES IMPROPRES.4. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-4

Convergence et calcul de l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right) dx$

Éléments de correction : 4.

• **Convergence de l'intégrale**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \text{ pour } x \in]0; 1[.$$

La fonction f est continue sur $]0; 1[$. En effet,

la fonction $x \mapsto 1-x$ est continue sur $]0; 1[$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . La fonction \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* , donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]0; 1[$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0; 1[$, donc $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x^2}$ est continue sur $]0; 1[$.

Il est alors clair que f est continue sur $]0; 1[$ puisque $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est.

L'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ est impropre en 0 et en 1.

• **Etude en 0.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} &= \frac{1}{x} + \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) = -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Rappelons peut-être que $o(x^2) = x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, donc

$$\frac{o(x^2)}{x^2} = \varepsilon(x) = x^0\varepsilon(x) = o(1). \text{ En tout état de cause, } \lim_{x \rightarrow 0} o(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2} : f \text{ est prolongeable par continuité en } 0,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ est faussement impropre, donc convergente.

• **Etude en 1.**

Le problème vient de $\frac{\ln(1-x)}{x^2}$ puisque l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé).

$$\frac{\ln(1-x)}{x^2} \underset{(1)}{\sim} \ln(1-x). \text{ L'intégrale } \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx \text{ converge : en effet,}$$

effectuons le changement de variable $u = 1-x$, qui est C^1 bijectif sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on obtient

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln u du. \text{ Cette dernière intégrale est convergente car la fonction } \ln \text{ est une fonction de référence en } 0 \text{ dont l'intégrale converge.}$$

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ converge, donc par équivalence des fonctions continues de

signe constant l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx$ converge.

Conclusion : l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ est convergente.

Les deux intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ convergent donc

l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente

• **Calcul de l'intégrale**

Soit $(a, b) \in]0; 1]^2$ tel que $a < b$.

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x} dx + \int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx \\ &= \ln|b| - \ln|a| + \underbrace{\int_a^b \frac{\ln(1-x)}{x^2} dx}_{=J(a,b)} \end{aligned}$$

Dans l'intégrale $J(a, b)$, faisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(1-x) &\implies u'(x) = -\frac{1}{1-x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} &\iff v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \left[-\frac{\ln(1-x)}{x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \underbrace{\int_a^b \frac{dx}{x(1-x)}}_{=K(a,b)} \end{aligned}$$

◁ **Calcul de $K(a, b)$.**

Décomposons $\frac{1}{x(1-x)}$ en une somme ; la technique est maintenant classique car maintes fois utilisée. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{x(1-x)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x}$. On réduit au même dénominateur et on obtient $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(\beta - \alpha)x + \alpha}{x(1-x)}$.

Les réels α et β sont solutions du système : $\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Ce qui donne immédiatement $\alpha = \beta = 1$, donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x(1-x)} &= \int_a^b \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{x} dx + \int_a^b \frac{1}{1-x} dx \\ &= [\ln|x|]_a^b - [\ln|1-x|]_a^b \\ K(a, b) &= \ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(a, b) &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - (\ln b - \ln a - \ln(1-b) + \ln(1-a)) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \ln b - \ln a + J(a, b) \\ &= \ln b - \ln a - \frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln b + \ln a + \ln(1-b) - \ln(1-a) \\ &= -\frac{\ln(1-b)}{b} + \frac{\ln(1-a)}{a} + \ln(1-b) - \ln(1-a) \end{aligned}$$

Il est clair que $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} J(a, b)$.

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-a)}{a} - \ln(1-a) = -1 + 0 = -1 \text{ car } \ln(1-a) \underset{(0)}{\sim} -a.$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 1^-} \left(-\frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b) \right) &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \frac{(b-1)\ln(1-b)}{b} \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} -\frac{(1-b)\ln(1-b)}{b} \\ &= 0 \text{ car par croissances comparées} \\ &\quad \lim_{b \rightarrow 1^-} (1-b)\ln(1-b) = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} I(a, b) = -1 + 0 = -1$

$\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow 1^-}} I(a, b) = -1 \text{ veut dire } \int_0^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) dx = -1$
