INTEGRALES GENERALISEES 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Déterminer, si elles existent,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$.

Indications - Intégrales généralisées.3

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = 0,$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ n'existe pas car $\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ diverge.

Eléments de correction : intégrales généralisées.3

1) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$. Cette intégrale existe car $t \longmapsto \dfrac{t^n}{1+t^n}$ est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $0 \leq t^n \leq 1$ donc $1 \leq 1+t^n \leq 2$; il s'ensuit que $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$; puis on multiplie par t^n qui est ≥ 0 et on obtient l'encadrement :

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n.$$

Intégrons cet encadrement entre 0 et 1 $(0<1)$, il vient

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \leq \int_0^1 t^n dt$, soit (le calcul n'offre aucune difficulté),

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) Posons $g_n(t) = \dfrac{t^n}{1-t^n}$. La fonction g_n est continue sur $[0,1[$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ est impropre en 1.

Or, pour tout $t \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$.

Puis, pour $n \geq 1$, $\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{1-t^n}{1-t} = \lim_{t\to1} \sum_{k=0}^{n-1} t^k = n \neq 0$, donc $\dfrac{1-t^n}{1-t} \underset{(1)}{\sim} n$ ou encore $\dfrac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$.

Au voisinage de 1, t^n équivaut à 1.

Donc $\dfrac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$, soit $\dfrac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$,

Plaçons nous sur l'intervalle $[\frac{1}{2},1[$;

Les deux fonctions sont continues, positives sur $[\frac{1}{2},1[$, les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)}dt$ sont de même nature.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)}dt$ est divergente selon le critère de Riemann (on peut aussi primitiver $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$; on trouvera $t \longmapsto -\ln(1-t)$ dont la limite quand $t \to 1$ n'est pas réelle).

Puisque $\frac{1}{n} \neq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)}dt$ est divergente et par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ est divergente.

L'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ est divergente, cela veut dire qu'elle n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n \text{ n'existe pas}$$