INTEGRALES GENERALISEES 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Déterminer, si elles existent,

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$, puis $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Intégrales généralisées.3

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = 0,$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ n'existe pas car $\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ diverge.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : intégrales généralisées.3

1) Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$. Cette intégrale existe car $t \longmapsto \dfrac{t^n}{1+t^n}$ est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $0 \leq t^n \leq 1$ donc $1 \leq 1+t^n \leq 2$; il s'ensuit que $\frac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$; puis on multiplie par t^n qui est ≥ 0 et on obtient l'encadrement :

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n.$$

Intégrons cet encadrement entre 0 et 1 $(0<1)$, il vient

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \leq \int_0^1 t^n dt$, soit (le calcul n'offre aucune difficulté),

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) Posons $g_n(t) = \dfrac{t^n}{1-t^n}$. La fonction g_n est continue sur $[0,1[$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ est impropre en 1.

Or, pour tout $t \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$.

Puis, pour $n \geq 1$, $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1-t^n}{1-t} = \lim\limits_{t\to 1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k = n \neq 0$, donc $\dfrac{1-t^n}{1-t} \underset{(1)}{\sim} n$ ou encore $\dfrac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$.

Au voisinage de 1, t^n équivaut à 1.

Donc $\dfrac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$, soit $\dfrac{t^n}{1-t^n} \underset{(1)}{\sim} \dfrac{1}{n(1-t)}$,

Plaçons nous sur l'intervalle $[\frac{1}{2},1[$;

Les deux fonctions sont continues, positives sur $[\frac{1}{2},1[$, les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)}dt$ sont de même nature.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t)}dt$ est divergente selon le critère de Riemann (on peut aussi primitiver $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t}$; on trouvera $t \longmapsto -\ln(1-t)$ dont la limite quand $t \to 1$ n'est pas réelle).

Puisque $\frac{1}{n} \neq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{n(1-t)}dt$ est divergente et par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ est divergente.

L'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1-t^n}dt$ est divergente, cela veut dire qu'elle n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n \textbf{ n'existe pas}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021