INTEGRALES GENERALISEES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Quelle est la nature de l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)dx$

Jean MALLET

Indications - intégrales généralisées1.

On pourra faire un développement limité.

Posons $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$; en effet $x \longmapsto x^3+1$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la fonction racine cubique est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc par composition, $x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Même démonstration pour $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ et elle est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$

Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+1} &= \sqrt[3]{x^3(1+\frac{1}{x^3})} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \\ &= x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Faisons un développement limité de $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$.

$\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.

Donc $x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

NB Pour les étudiants qui ne sont pas familiarisés avec la notation de Landau, $o(\frac{1}{x^3}) = \frac{1}{x^3} \times \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$; donc $x \times o(\frac{1}{x^3}) = x \times \frac{1}{x^3} \times \varepsilon(x) = \frac{1}{x^2} \times \varepsilon(x) = o(\frac{1}{x^2})$.

De même

Pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} &= \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \\ &= \sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Faisons un développement limité de $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$.

$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

Donc $x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$

Il en résulte que, pour $x \geq 1$, $f(x) = x + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o(\frac{1}{x})$ car

$$\begin{aligned} o(\frac{1}{x^2}) + o(\frac{1}{x}) &= \frac{1}{x^2}\varepsilon_1(x) + \frac{1}{x}\varepsilon_2(x) \\ &= \frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)}_{=\alpha(x)} \end{aligned}$$

Et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, on en déduit que $\frac{1}{x}\alpha(x) = o(\frac{1}{x})$.

De plus $\frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$, donc finalement $f(x) = -\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$.

Conclusion : $f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} (-\frac{1}{2x})$

Les deux fonctions f et $x \longmapsto -\frac{1}{2x}$ sont continues, de signe constant (négatives) au voisinage de $+\infty$, les intégrales $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} -\frac{dx}{2x}$ sont de même nature.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} -\frac{dx}{2x}$ est divergente car $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge d'après le critère de Riemann ($\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$) et $-\frac{1}{2} \neq 0$.

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge et par conséquent

l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est divergente