



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-33

1) a, b, h sont trois réels tels que $a < h < b$.

Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

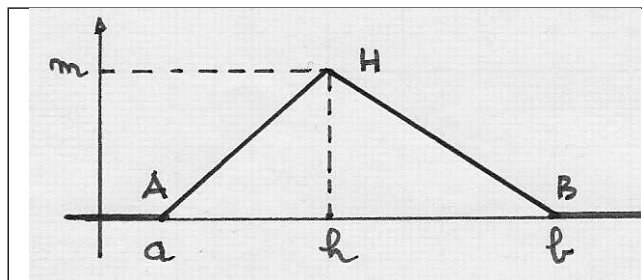
f est nulle sur $] -\infty, a] \cup [b, +\infty[$, f est affine sur $[a, h]$ et $[h, b]$ avec $f(h) = m$.

Calculer m pour que f soit une densité de probabilité d'une variable notée X .

2) Calculer l'espérance $E(X)$ de X si h est le milieu de $[a, b]$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

On a la configuration ci-dessous :



Equation de la droite (AH) : $y = \frac{m}{h-a}(x-a)$. Donc $\forall x \in [a, h]$, $f(x) = \frac{m}{h-a}(x-a)$.

Equation de la droite (BH) : $y = \frac{m}{h-b}(x-b)$. Donc $\forall x \in [h, b]$, $f(x) = \frac{m}{h-b}(x-b)$.

* Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

A l'extérieur de $[a, b]$, $f(x) = 0$.

Sur $[a, h]$, $x-a \geq 0$ et $\frac{m}{h-a} > 0$, donc $f(x) \geq 0$.

Sur $[h, b]$, $x-b \leq 0$ et $\frac{m}{h-b} < 0$, donc $f(x) \geq 0$.

* Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R} - \{a, h, b\}$, puisque, sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$, $]a, h[$, $]h, b[$ et $]b, +\infty[$, f est une fonction affine.

On remarque que f est continue aux points a, b puisque $f(a) = f(b) = 0$ et au point h car $f(h) = m$, mais cela n'a pas énormément d'importance pour cette question.

* L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et vaut $\int_a^b f(x)dx$, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ (c'est là que la continuité de f sur $[a, b]$ intervient).

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x)dx &= \int_0^h f(x)dx + \int_h^b f(x)dx \\ &= \frac{m}{h-a} \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^h + \frac{m}{h-b} \left[\frac{(x-b)^2}{2} \right]_h^b \\ &= \frac{m}{h-a} \frac{(h-a)^2}{2} - \frac{m}{h-b} \frac{(h-b)^2}{2} \\ &= \frac{m(h-a)}{2} + \frac{m(b-h)}{2} \\ &= \frac{m(b-a)}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^b f(x)dx = 1 \iff m = \frac{2}{b-a}$$

Remarque : on aurait pu dire que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du triangle AHB .

2) Dans cette question $h = \frac{a+b}{2}$. L'espérance de X existe sans problème car

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$, intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, $f(x) = \frac{2}{b-a} \frac{1}{\frac{a+b}{2} - a} (x-a) = \frac{4}{(b-a)^2} (x-a)$.

Sur $[\frac{a+b}{2}, b]$, $f(x) = -\frac{4}{(b-a)^2} (x-b)$.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} x(x-a)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b x(x-b)dx \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^{\frac{a+b}{2}} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} \right]_{\frac{a+b}{2}}^b \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{(a+b)^3}{24} - \frac{a(a+b)^2}{8} - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2} \right) + \frac{(a+b)^3}{24} - \frac{b(a+b)^2}{8} \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^2}{8}(a+b) + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6} \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^3}{8} + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6} \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(-\frac{(a+b)^3}{24} + \frac{a^3+b^3}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{6(b-a)^2} \left(-(a+b)^3 + 4(a^3+b^3) \right) \\
 &= \frac{1}{6(b-a)^2} \left(3a^3 + 3b^3 - 3ab^2 - 3a^2b \right) \\
 &= \frac{1}{2(b-a)^2} \left(a^3 + b^3 - ab(a+b) \right) \\
 &= \frac{1}{2(b-a)^2} \left((a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \right) \\
 &= \frac{1}{2(b-a)^2} (a+b)(b-a)^2
 \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Ce résultat était prévisible car la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a+b}{2}$