VARIABLES A DENSITE

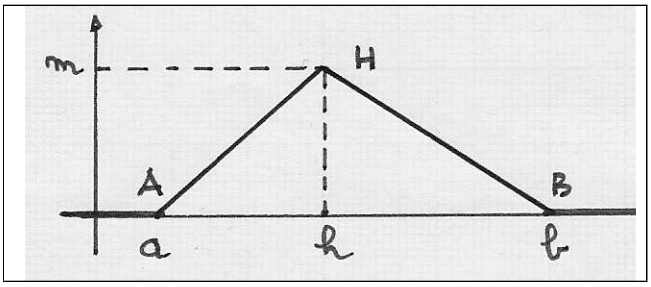
ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–33

1) a, b, h sont trois réels tels que $a < h < b$.
Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
f est nulle sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, f est affine sur $[a, h]$ et $[h, b]$ avec $f(h) = m$. .
Calculer m pour que f soit une densité de probabilité d'une variable notée X.
2) Calculer l'espérance $E(X)$ de X si h est le milieu de $[a, b]$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

On a la configuration ci-dessous :



Equation de la droite (AH) : $y = \dfrac{m}{h-a}(x-a)$. Donc $\forall x \in [a,h],\ f(x) = \dfrac{m}{h-a}(x-a)\cdot$

Equation de la droite (BH) : $y = \dfrac{m}{h-b}(x-b)$. Donc $\forall x \in [h,b],\ f(x) = \dfrac{m}{h-b}(x-b)\cdot$

$*$ Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.
A l'extérieur de $[a,b],\ f(x) = 0$.
Sur $[a,h],\ x-a \geq 0$ et $\dfrac{m}{h-a} > 0$, donc $f(x) \geq 0$.

Sur $[h,b],\ x-b \leq 0$ et $\dfrac{m}{h-b} < 0$, donc $f(x) \geq 0$.

$*$ Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}-\{a,h,b\}$, puisque, sur chacun des intervalles $]-\infty,a[,\ ]a,h[,\ ]h,b[$ et $]b,+\infty[,\ f$ est une fonction affine.
On remarque que f est continue aux points a,b puisque $f(a)=f(b)=0$ et au point h car $f(h)=m$, mais cela n'a pas énormément d'importance pour cette question.

$*$ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ (c'est là que la continuité de f sur $[a,b]$ intervient).

$$\begin{aligned}
\int_0^b f(x)dx &= \int_0^h f(x)dx + \int_h^b f(x)dx \\
&= \frac{m}{h-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^h + \frac{m}{h-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_h^b \\
&= \frac{m}{h-a}\frac{(h-a)^2}{2} - \frac{m}{h-b}\frac{(h-b)^2}{2} \\
&= \frac{m(h-a)}{2} + \frac{m(b-h)}{2} \\
&= \frac{m(b-a)}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^b f(x)dx = 1 \Longleftrightarrow m = \frac{2}{b-a}$$

Remarque : on aurait pu dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du triangle AHB.

2) Dans cette question $h = \frac{a+b}{2}\cdot$ L'espérance de X existe sans problème car $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(xdx = \int_a^b xf(x)dx$, intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Sur $[a, \frac{a+b}{2}]$, $f(x) = \frac{2}{b-a}\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}(x-a) = \frac{4}{(b-a)^2}(x-a)\cdot$

Sur $[\frac{a+b}{2}, b]$, $f(x) = -\frac{4}{(b-a)^2}(x-b)\cdot$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\int_a^{\frac{a+b}{2}} x(x-a)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b x(x-b)dx\Big)\\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\Big]_a^{\frac{a+b}{2}} - \Big[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}\Big]_{\frac{a+b}{2}}^b\Big)\\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{24} - \frac{a(a+b)^2}{8} - (\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}) - (\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{2}) + \frac{(a+b)^3}{24} - \frac{b(a+b)^2}{8}\Big)\\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^2}{8}(a+b) + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6}\Big)\\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^3}{8} + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6}\Big)\\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(-\frac{(a+b)^3}{24} + \frac{a^3+b^3}{6}\Big)\\
&= \frac{1}{6(b-a)^2}\Big(-(a+b)^3 + 4(a^3+b^3)\Big)\\
&= \frac{1}{6(b-a)^2}\Big(3a^3+3b^3-3ab^2-3a^2b\Big)\\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\Big(a^3+b^3-ab(a+b)\Big)\\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\Big((a+b)(a^2-ab+b^2-ab\Big)\\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}(a+b)(b-a)^2
\end{aligned}
$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Ce résultat était prévisible car la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a+b}{2}$

