VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–33

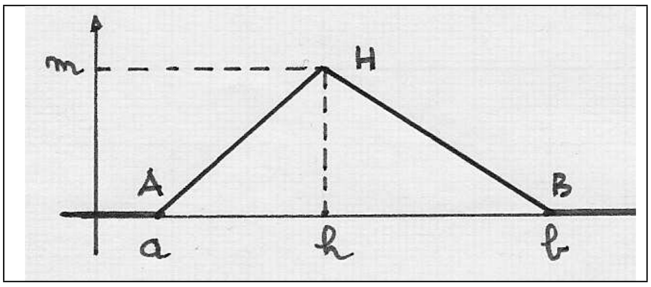
1) a, b, h sont trois réels tels que $a < h < b$.
Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
f est nulle sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, f est affine sur $[a, h]$ et $[h, b]$ avec $f(h) = m$. .
Calculer m pour que f soit une densité de probabilité d'une variable notée X.
2) Calculer l'espérance $E(X)$ de X si h est le milieu de $[a, b]$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

On a la configuration ci-dessous :



Equation de la droite (AH) : $y = \dfrac{m}{h-a}(x-a)$. Donc $\forall x \in [a,h],\ f(x) = \dfrac{m}{h-a}(x-a)$·

Equation de la droite (BH) : $y = \dfrac{m}{h-b}(x-b)$. Donc $\forall x \in [h,b],\ f(x) = \dfrac{m}{h-b}(x-b)$·

$*$ Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.
A l'extérieur de $[a,b],\ f(x) = 0$.
Sur $[a,h],\ x-a \geq 0$ et $\dfrac{m}{h-a} > 0$, donc $f(x) \geq 0$.

Sur $[h,b],\ x-b \leq 0$ et $\dfrac{m}{h-b} < 0$, donc $f(x) \geq 0$.

$*$ Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R} - \{a,h,b\}$, puisque, sur chacun des intervalles $]-\infty,a[,\ ]a,h[,\ ]h,b[$ et $]b,+\infty[$, f est une fonction affine.
On remarque que f est continue aux points a,b puisque $f(a) = f(b) = 0$ et au point h car $f(h) = m$, mais cela n'a pas énormément d'importance pour cette question.

$*$ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$ (c'est là que la continuité de f sur $[a,b]$ intervient).

$$\begin{aligned}
\int_0^b f(x)dx &= \int_0^h f(x)dx + \int_h^b f(x)dx \\
&= \frac{m}{h-a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^h + \frac{m}{h-b}\left[\frac{(x-b)^2}{2}\right]_h^b \\
&= \frac{m}{h-a}\frac{(h-a)^2}{2} - \frac{m}{h-b}\frac{(h-b)^2}{2} \\
&= \frac{m(h-a)}{2} + \frac{m(b-h)}{2} \\
&= \frac{m(b-a)}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^b f(x)dx = 1 \Longleftrightarrow m = \frac{2}{b-a}$$

Remarque : on aurait pu dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire du triangle AHB.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2) Dans cette question $h = \dfrac{a+b}{2}\cdot$ L'espérance de X existe sans problème car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(xdx = \int_a^b xf(x)dx$, intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Sur $[a, \dfrac{a+b}{2}]$, $f(x) = \dfrac{2}{b-a}\dfrac{1}{\frac{a+b}{2}-a}(x-a) = \dfrac{4}{(b-a)^2}(x-a)\cdot$

Sur $[\dfrac{a+b}{2}, b]$, $f(x) = -\dfrac{4}{(b-a)^2}(x-b)\cdot$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\int_a^{\frac{a+b}{2}} x(x-a)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b x(x-b)dx\Big) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\Big[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\Big]_a^{\frac{a+b}{2}} - \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2}\Big]_{\frac{a+b}{2}}^b\Big) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{24} - \frac{a(a+b)^2}{8} - (\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}) - (\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2}) + \frac{(a+b)^3}{24} - \frac{b(a+b)^2}{8}\Big) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^2}{8}(a+b) + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6}\Big) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(\frac{(a+b)^3}{12} - \frac{(a+b)^3}{8} + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6}\Big) \\
&= \frac{4}{(b-a)^2}\Big(-\frac{(a+b)^3}{24} + \frac{a^3+b^3}{6}\Big) \\
&= \frac{1}{6(b-a)^2}\Big(-(a+b)^3 + 4(a^3+b^3)\Big) \\
&= \frac{1}{6(b-a)^2}\Big(3a^3 + 3b^3 - 3ab^2 - 3a^2b\Big) \\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\Big(a^3 + b^3 - ab(a+b)\Big) \\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\Big((a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab\Big) \\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}(a+b)(b-a)^2
\end{aligned}
$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Ce résultat était prévisible car la fonction f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021