VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–32

On considère deux variables aléatoires indépendantes, X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{([0,2])}$; on pose $q = 1-p$.

On pose $T = X + Y$, $Z = \lfloor T \rfloor$ où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet que T et Z sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit qu'une variable aléatoire V est à densité généralisée si sa fonction de répartition F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf sur un ensemble dénombrable de points. Une densité f_V de V s'obtient alors, en tout point t où F_V est dérivable, par la relation $f_V(t) = F_V'(t)$.

1) On note F_T la fonction de répartition de T.

a) Donner, pour tout réel t, l'expression de $F_T(t)$ en distinguant a priori les cas :

$t < 1$, $1 \leq t < 2$, $2 \leq t < 3$ et $k \leq t < k+1$, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(On remarquera que le cas $2 \leq t < 3$ rejoint le cas général $k \geq 3$.)

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité généralisée.

c) Donner l'expression d'une densité de T.

2–a) Donner la loi de Z.

b) Calculer $E(Z)$.

c) Donner la loi de $\lfloor Y \rfloor$ ainsi que son espérance.

d) Après avoir vérifié que, si x est un entier naturel et y un nombre réel, alors $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$, retrouver la loi de Z et donner la valeur de son espérance.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1–a)

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = [0,2]$.

Rappelons que la fonction de répartition de Y est F_Y donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si} \quad t \in [0,2] \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

Puisque $X \geq 1$ et $Y \geq 0$, on a $X + Y \geq X \geq 1$.

- Pour $t < 1$, l'événement $(T = X + Y \leq t < 1)$ est impossible :

$$\forall t < 1, \ F_T(t) = 0.$$

- Soit $1 \leq t < 2$. Si $X \geq 2$, alors $T = X + Y \geq 2$, donc l'événement $(T \leq t)$ est alors impossible. Il s'ensuit que $(T \leq t) \neq \emptyset$ impose (dans ces conditions) $X = 1$.

$$\begin{aligned} T \leq t &= (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1) \cap (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap 1 + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap Y \leq t - 1) \end{aligned}$$

$P(T \leq t) = P(X = 1) \times P(Y \leq t - 1)$ par indépendance des variables X et Y, donc, puisque $t - 1 \in [0,1]$,

$$\forall t \in [1,2[, \ F_T(t) = p\frac{t-1}{2}$$

- Soit $2 \leq t < 3$. Si $X \geq 3$, alors $T = X + Y \geq 3$, donc l'événement $(T \leq t)$ est alors impossible. Il s'ensuit que $(T \leq t) \neq \emptyset$ impose (dans ces conditions) $X = 1$ ou $X = 2$.

$$\begin{aligned} T \leq t &= (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cup X = 2) \cap (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap X + Y \leq t) \cup (X = 2 \cap X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap Y \leq t - 1) \cup (X = 2 \cap Y \leq t - 2) \end{aligned}$$

$P(T \leq t) = P(X = 1) \times P(Y \leq t - 1) + P(X = 2) \times (Y \leq t - 2)$ par incompatibilité des deux événements et par indépendance des variables X et Y. De plus $t - 1 \in [1,2]$ et $t - 2 \in [0,1]$, donc

$P(T \leq t) = p\frac{t-1}{2} + pq\frac{t-2}{2}$

$$\forall t \in [2,3[, \ F_T(t) = p\frac{t-1}{2} + pq\frac{t-2}{2}$$

- Soit k un entier tel que $k \geq 3$ et $k \leq t < k + 1$.

L'événement $X + Y \leq t < k + 1$ impose $X \leq k$ car visiblement si $X \geq k + 1$, alors $X + Y \geq k + 1, (Y \geq 0)$, ce qui est incompatible avec la condition $X + Y \leq t < k + 1$.

$$(X + Y \leq t) = \bigcup_{n=1}^{k} (X = n \cap X + Y \leq t) = \bigcup_{n=1}^{k} (X = n \cap Y \leq t - n).$$

Si $t - n \geq 2$ c'est-à-dire si $n \leq t - 2$, alors l'événement $Y \leq t - n$ est l'événement certain ;

Or on sait que $k \leq t < k + 1$, donc $k - 2 \leq t - 2 \leq k - 1$. On conclut que $\forall n \leq k - 2$, on a nécessairement $n \leq t - 2$, donc $(Y \leq t - 2) = \Omega$. Ce qui amène à écrire :

$$\begin{aligned} (X + Y \leq t) &= (X \leq k - 2 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k - 1 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k \cap X + Y \leq t) \\ &= (X \leq k - 2 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k - 1 \cap Y \leq t - k + 1) \cup (X = k \cap Y \leq t - k) \\ &= (X \leq k - 2) \cup (X = k - 1 \cap Y \leq t - k + 1) \cup (X = k \cap Y \leq t - k) \end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ces trois événements étant incompatibles deux à deux,

$$\begin{aligned} P(X+Y\leq t) &= P(X\leq k-2)+P(X=k-1\cap Y\leq t-k+1)+P(X=k\cap Y\leq t-k)\\ &= P(X\leq k-2)+P(X=k-1)P(Y\leq t-k+1)+P(X=k)P(Y\leq t-k), \end{aligned}$$

car les variables X et Y sont indépendantes.

$$\begin{aligned} P(X\leq k-2) &= \sum_{i=1}^{k-2} P(X=i)=\sum_{i=1}^{k-2} pq^{i-1}\\ &= p\frac{1-q^{k-2}}{1-q}=1-q^{k-2} \end{aligned}$$

Remarquons que $k\leq t<k+1 \Longrightarrow 1\leq t-k+1<2$ et $0\leq t-k<1$, donc $P(Y\leq t-k+1)=\dfrac{t-k+1}{2}$ et $P(Y\leq t-k)=\dfrac{t-k}{2}$.

Pour tout $k\geq 3$, pour $k\leq t<k+1$, $F_T(t)=1-q^{k-2}+\dfrac{t-k+1}{2}pq^{k-2}+\dfrac{t-k}{2}pq^{k-1}$

Remarque : pour $k=2$, la formule précédente donne $1-1+p\dfrac{t-1}{2}+pq\dfrac{t-2}{2}=F_T(t)$ lorsque $2\leq t<3$.

$$\text{Finalement } F_T(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<1\\ p\dfrac{t-1}{2} & \text{si} \quad 1\leq t<2\\ 1-q^{k-2}+\dfrac{t-k+1}{2}pq^{k-2}+\dfrac{t-k}{2}pq^{k-1} & \text{si } k\geq 2 \text{ et } k\leq t<k+1 \end{cases}$$

1–b)

La fonction F_T est évidemment de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\mathbb{N}^*$.

Etudions la continuité aux points $x=k$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

- La continuité au point 1 est évidente.
- Continuité au point 2

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 2^-} F_T(t) &= \lim_{t\to 2^-} p\frac{t-1}{2}=\frac{p}{2}\\ \lim_{t\to 2^+} F_T(t) &= \lim_{t\to 2^+} (p\frac{t-1}{2}+\frac{t-2}{2}pq)=\frac{p}{2} \quad =F_T(2) \end{aligned}$$

La fonction F_T est continue au point 2.

- Soit $k\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}$

Sur $[k-1,k[$, $F_T(t)=1-q^{k-3}+\dfrac{t-k+2}{2}pq^{k-3}+\dfrac{t-k+1}{2}pq^{k-2}$

$$\lim_{t\to k^-} F_T(t)=1-q^{k-3}+pq^{k-3}+\frac{pq^{k-2}}{2}=1-q^{k-3}(1-p)+\frac{pq^{k-2}}{2}=1-q^{k-2}+\frac{pq^{k-2}}{2}.$$

Sur $[k,k+1[$, $F_T(t)=1-q^{k-2}+\dfrac{t-k+1}{2}pq^{k-2}+\dfrac{t-k}{2}pq^{k-2}$

$$\lim_{t\to k^+} F_T(t)=1-q^{k-2}+\frac{pq^{k-2}}{2}=F_T(k).$$

La fonction F_T est continue en k.

La fonction F_T est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\mathbb{N}^*$: la variable T est une variable aléatoire à densité généralisée.

1–c)

Nous prendrons pour densité f_T la dérivée F'_T là où F est de classe C^1 c'est à dire sur $]-\infty,1[\bigcup_{k=1}^{+\infty}]k,k+1[$ et nous prolongerons par continuité à droite aux points de $\mathbb{N}^*$.

d'où le résultat :

$$f_T(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<1\\ \dfrac{p}{2} & \text{si} \quad 1\leq t<2\\ \dfrac{pq^{k-2}}{2}+\dfrac{pq^{k-1}}{2} & \text{si} \quad k\leq t<k+1,\ k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2–a)

$Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $(Z=k)=(k\leq X+Y<k+1)$. La fonction F_T est continue sur $\mathbb{R}$ donc, si $a\leq b$, $P(a\leq T<b)=P(a<T\leq b)$. Il en résulte que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Z=k)=F_T(k+1)-F_T(k).$$

$P(Z=1)=F_T(2)-F_T(1)=\dfrac{p}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{Soit } k\geq 2,\ P(Z=k) &= 1-q^{k-2}+pq^{k-2}+\frac{pq^{k-1}}{2}-(1-q^{k-3}+pq^{k-3}+\frac{pq^{k-2}}{2})\\ &= -q^{k-2}+pq^{k-2}+\frac{pq^{k-1}}{2}-q^{k-3}(-1+p)-\frac{pq^{k-2}}{2}\\ &= -q^{k-2}+pq^{k-2}+\frac{pq^{k-1}}{2}+q^{k-2}-\frac{pq^{k-2}}{2}\\ &= \frac{pq^{k-2}}{2}+\frac{pq^{k-1}}{2}\\ &= \frac{pq^{k-2}(1+q)}{2}\end{aligned}$$

$$\text{En résumé } P(Z=k)=\begin{cases}\dfrac{p}{2} & \text{si}\quad k=1\\ \dfrac{pq^{k-2}(1+q)}{2} & \text{si } k\geq 2\end{cases}$$

2–b)

$E(Z)=\dfrac{p}{2}+\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}kP(Z=k)$ à condition que cette série converge (l'absolue convergence n'est pas nécessaire car la série est à termes positifs).

Pour $k\geq 2$, $kP(Z=k)=\dfrac{p(1+q)}{2}kq^{k-2}=\dfrac{p(1+q)}{2q}kq^{k-1}$. On reconnaît un multiple du terme général de la série dérivée de la série géométrique q^k, série convergente car la raison $q\in]-1,1[$. $E(Z)$ existe et

$$\begin{aligned}E(Z) &= \frac{p}{2}+\frac{p(1+q)}{2q}\sum_{k=2}^{+\infty}kq^{k-1}\\ &= \frac{p}{2}+\frac{p(1+q)}{2q}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}-1\Big)\\ &= \frac{p}{2}+\frac{p(1+q)}{2q}\Big(\frac{1}{(1-q)^2}-1\Big)\\ &= \frac{p}{2}-\frac{p(1+q)}{2q}+\frac{p(1+q)}{2qp^2}\\ &= \frac{p}{2}-\frac{p(1+q)}{2q}+\frac{(1+q)}{2qp}\\ &= -\frac{p}{2q}+\frac{1+q}{2pq}=\frac{1}{2pq}\Big(-p^2+1+q\Big)\\ &= \frac{1}{2pq}\Big((1-p)(1+p)+q\Big)\end{aligned}$$

$$E(Z)=\frac{2+p}{2p}.$$

2–c)

$\lfloor Y\rfloor\in\{0,1\}$. L'événement $\lfloor Y\rfloor=2$ a une probabilité nulle car il équivaut à $Y=2$.

$P(\lfloor Y\rfloor=0)=P(0\leq Y<1)=\dfrac{1}{2}$ et de même $P(\lfloor Y\rfloor=1)=\dfrac{1}{2}$

$\lfloor Y\rfloor$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$: $E(\lfloor Y\rfloor)=\dfrac{1}{2}$

2–d)

$\forall y\in\mathbb{R}$, $\lfloor y\rfloor\leq y<\lfloor y\rfloor+1$; pour tout entier $x\in\mathbb{N}$, $x+\lfloor y\rfloor\leq x+y<(x+\lfloor y\rfloor)+1$. Et comme $x+\lfloor y\rfloor$ est un entier, cet encadrement désigne $x+\lfloor y\rfloor$ comme la partie entière de $x+y$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$Z = \lfloor X + Y \rfloor = X + \lfloor Y \rfloor$ puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Remarquons que X et Y indépendantes implique X et $\lfloor Y \rfloor$ indépendantes.

- $\begin{aligned} P(Z=1) &= P(X + \lfloor Y \rfloor = 1) = (X = 1 \cap \lfloor Y \rfloor = 0) \\ &= P(X=1) \times P(\lfloor Y \rfloor = 0) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{p}{2} \end{aligned}$
- pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(X + \lfloor Y \rfloor = k) = P\Big(X = k \cap \lfloor Y \rfloor = 0) \cup (X = k-1 \cap \lfloor Y \rfloor = 1\Big) \\ &= P(X = k \cap \lfloor Y \rfloor = 0) + P(X = k-1 \cap \lfloor Y \rfloor = 1) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(X=k) \times P(\lfloor Y \rfloor = 0) + P(X = k-1) \times P(\lfloor Y \rfloor = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2} p q^{k-1} + \frac{1}{2} p q^{k-2} = \frac{p q^{k-2}(1+q)}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien la loi de Z

$Z = X + \lfloor Y \rfloor$. D'autre part X et $\lfloor Y \rfloor$ admettent des espérances, donc Z aussi et

$$E(Z) = E(X) + E(\lfloor Y \rfloor = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{p+2}{2p}.$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021