



VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-32

On considère deux variables aléatoires indépendantes, X et Y , définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , telles que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$ et Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}_{(0,2]}$; on pose $q = 1 - p$.

On pose $T = X + Y$, $Z = \lfloor T \rfloor$ où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T . On admet que T et Z sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On dit qu'une variable aléatoire V est à densité généralisée si sa fonction de répartition F_V est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sauf sur un ensemble dénombrable de points. Une densité f_V de V s'obtient alors, en tout point t où F_V est dérivable, par la relation $f_V(t) = F'_V(t)$.

1) On note F_T la fonction de répartition de T .

a) Donner, pour tout réel t , l'expression de $F_T(t)$ en distinguant a priori les cas :

$t < 1$, $1 \leq t < 2$, $2 \leq t < 3$ et $k \leq t < k + 1$, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(On remarquera que le cas $2 \leq t < 3$ rejoint le cas général $k \geq 3$.)

b) Vérifier que T est une variable aléatoire à densité généralisée.

c) Donner l'expression d'une densité de T .

2-a) Donner la loi de Z .

b) Calculer $E(Z)$.

c) Donner la loi de $\lfloor Y \rfloor$ ainsi que son espérance.

d) Après avoir vérifié que, si x est un entier naturel et y un nombre réel, alors $\lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor$, retrouver la loi de Z et donner la valeur de son espérance.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1-a)

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = [0, 2]$.

Rappelons que la fonction de répartition de Y est F_Y donnée par :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } t \in [0, 2] \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

Puisque $X \geq 1$ et $Y \geq 0$, on a $X + Y \geq X \geq 1$.

- Pour $t < 1$, l'événement $(T = X + Y \leq t < 1)$ est impossible :

$$\forall t < 1, F_T(t) = 0.$$

- Soit $1 \leq t < 2$. Si $X \geq 2$, alors $T = X + Y \geq 2$, donc l'événement $(T \leq t)$ est alors impossible. Il s'ensuit que $(T \leq t) \neq \emptyset$ impose (dans ces conditions) $X = 1$.

$$\begin{aligned} T \leq t &= (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1) \cap (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap 1 + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap Y \leq t - 1) \end{aligned}$$

$P(T \leq t) = P(X = 1) \times P(Y \leq t - 1)$ par indépendance des variables X et Y , donc, puisque $t - 1 \in [0, 1]$,

$$\forall t \in [1, 2[, F_T(t) = p \frac{t-1}{2}$$

- Soit $2 \leq t < 3$. Si $X \geq 3$, alors $T = X + Y \geq 3$, donc l'événement $(T \leq t)$ est alors impossible. Il s'ensuit que $(T \leq t) \neq \emptyset$ impose (dans ces conditions) $X = 1$ ou $X = 2$.

$$\begin{aligned} T \leq t &= (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cup X = 2) \cap (X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap X + Y \leq t) \cup (X = 2 \cap X + Y \leq t) \\ &= (X = 1 \cap Y \leq t - 1) \cup (X = 2 \cap Y \leq t - 2) \end{aligned}$$

$P(T \leq t) = P(X = 1) \times P(Y \leq t - 1) + P(X = 2) \times P(Y \leq t - 2)$ par incompatibilité des deux événements et par indépendance des variables X et Y . De plus $t - 1 \in [1, 2]$ et $t - 2 \in [0, 1]$, donc

$$P(T \leq t) = p \frac{t-1}{2} + pq \frac{t-2}{2}$$

$$\forall t \in [2, 3[, F_T(t) = p \frac{t-1}{2} + pq \frac{t-2}{2}$$

- Soit k un entier tel que $k \geq 3$ et $k \leq t < k + 1$.

L'événement $X + Y \leq t < k + 1$ impose $X \leq k$ car visiblement si $X \geq k + 1$, alors $X + Y \geq k + 1, (Y \geq 0)$, ce qui est incompatible avec la condition $X + Y \leq t < k + 1$.

$$(X + Y \leq t) = \bigcup_{n=1}^k (X = n \cap X + Y \leq t) = \bigcup_{n=1}^k (X = n \cap Y \leq t - n).$$

Si $t - n \geq 2$ c'est-à-dire si $n \leq t - 2$, alors l'événement $Y \leq t - n$ est l'événement certain ;

Or on sait que $k \leq t < k + 1$, donc $k - 2 \leq t - 2 \leq k - 1$. On conclut que $\forall n \leq k - 2$, on a nécessairement $n \leq t - 2$, donc $(Y \leq t - 2) = \Omega$. Ce qui amène à écrire :

$$\begin{aligned} (X + Y \leq t) &= (X \leq k - 2 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k - 1 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k \cap X + Y \leq t) \\ &= (X \leq k - 2 \cap X + Y \leq t) \cup (X = k - 1 \cap Y \leq t - k + 1) \cup (X = k \cap Y \leq t - k) \\ &= (X \leq k - 2) \cup (X = k - 1 \cap Y \leq t - k + 1) \cup (X = k \cap Y \leq t - k) \end{aligned}$$

Ces trois événements étant incompatibles deux à deux,

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq t) &= P(X \leq k-2) + P(X = k-1 \cap Y \leq t-k+1) + P(X = k \cap Y \leq t-k) \\ &= P(X \leq k-2) + P(X = k-1)P(Y \leq t-k+1) + P(X = k)P(Y \leq t-k), \end{aligned}$$

car les variables X et Y sont indépendantes.

$$\begin{aligned} P(X \leq k-2) &= \sum_{i=1}^{k-2} P(X = i) = \sum_{i=1}^{k-2} pq^{i-1} \\ &= p \frac{1 - q^{k-2}}{1 - q} = 1 - q^{k-2} \end{aligned}$$

Remarquons que $k \leq t < k+1 \implies 1 \leq t-k+1 < 2$ et $0 \leq t-k < 1$, donc $P(Y \leq t-k+1) = \frac{t-k+1}{2}$ et $P(Y \leq t-k) = \frac{t-k}{2}$.

$$\text{Pour tout } k \geq 3, \text{ pour } k \leq t < k+1, F_T(t) = 1 - q^{k-2} + \frac{t-k+1}{2} pq^{k-2} + \frac{t-k}{2} pq^{k-1}$$

Remarque : pour $k = 2$, la formule précédente donne $1 - 1 + p \frac{t-1}{2} + pq \frac{t-2}{2} = F_T(t)$ lorsque $2 \leq t < 3$.

$$\text{Finalement } F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ p \frac{t-1}{2} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 - q^{k-2} + \frac{t-k+1}{2} pq^{k-2} + \frac{t-k}{2} pq^{k-1} & \text{si } k \geq 2 \text{ et } k \leq t < k+1 \end{cases}$$

1-b)

La fonction F_T est évidemment de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \mathbb{N}^*$.

Etudions la continuité aux points $x = k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

- La continuité au point 1 est évidente.
- Continuité au point 2

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2^-} F_T(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} p \frac{t-1}{2} = \frac{p}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} F_T(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^+} (p \frac{t-1}{2} + \frac{t-2}{2} pq) = \frac{p}{2} = F_T(2) \end{aligned}$$

La fonction F_T est continue au point 2.

- Soit $k \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$

$$\text{Sur } [k-1, k[, F_T(t) = 1 - q^{k-3} + \frac{t-k+2}{2} pq^{k-3} + \frac{t-k+1}{2} pq^{k-2}$$

$$\lim_{t \rightarrow k^-} F_T(t) = 1 - q^{k-3} + pq^{k-3} + \frac{pq^{k-2}}{2} = 1 - q^{k-3}(1-p) + \frac{pq^{k-2}}{2} = 1 - q^{k-2} + \frac{pq^{k-2}}{2}.$$

$$\text{Sur } [k, k+1[, F_T(t) = 1 - q^{k-2} + \frac{t-k+1}{2} pq^{k-2} + \frac{t-k}{2} pq^{k-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow k^+} F_T(t) = 1 - q^{k-2} + \frac{pq^{k-2}}{2} = F_T(k).$$

La fonction F_T est continue en k .

La fonction F_T est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \mathbb{N}^*$: la variable T est une variable aléatoire à densité généralisée.

1-c)

Nous prendrons pour densité f_T la dérivée F'_T là où F est de classe C^1 c'est à dire sur $] -\infty, 1[\cup_{k=1}^{+\infty}]k, k+1[$ et nous prolongerons par continuité à droite aux points de \mathbb{N}^* .
d'où le résultat :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{p}{2} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{pq^{k-2}}{2} + \frac{pq^{k-1}}{2} & \text{si } k \leq t < k+1, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2-a)

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(Z = k) = (k \leq X + Y < k + 1)$. La fonction F_T est continue sur \mathbb{R} donc, si $a \leq b$, $P(a \leq T < b) = P(a < T \leq b)$. Il en résulte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Z = k) = F_T(k + 1) - F_T(k).$$

$$P(Z = 1) = F_T(2) - F_T(1) = \frac{p}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \geq 2, P(Z = k) &= 1 - q^{k-2} + pq^{k-2} + \frac{pq^{k-1}}{2} - (1 - q^{k-3} + pq^{k-3} + \frac{pq^{k-2}}{2}) \\ &= -q^{k-2} + pq^{k-2} + \frac{pq^{k-1}}{2} - q^{k-3}(-1 + p) - \frac{pq^{k-2}}{2} \\ &= -q^{k-2} + pq^{k-2} + \frac{pq^{k-1}}{2} + q^{k-2} - \frac{pq^{k-2}}{2} \\ &= \frac{pq^{k-2}}{2} + \frac{pq^{k-1}}{2} \\ &= \frac{pq^{k-2}(1 + q)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{En résumé } P(Z = k) = \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } k = 1 \\ \frac{pq^{k-2}(1 + q)}{2} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

2-b)

$E(Z) = \frac{p}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} kP(Z = k)$ à condition que cette série converge (l'absolue convergence n'est pas nécessaire car la série est à termes positifs).

Pour $k \geq 2$, $kP(Z = k) = \frac{p(1 + q)}{2} kq^{k-2} = \frac{p(1 + q)}{2q} kq^{k-1}$. On reconnaît un multiple du terme général de la série dérivée de la série géométrique q^k , série convergente car la raison $q \in]-1, 1[$. $E(Z)$ existe et

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{p}{2} + \frac{p(1 + q)}{2q} \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= \frac{p}{2} + \frac{p(1 + q)}{2q} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - 1 \right) \\ &= \frac{p}{2} + \frac{p(1 + q)}{2q} \left(\frac{1}{(1 - q)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{p}{2} - \frac{p(1 + q)}{2q} + \frac{p(1 + q)}{2qp^2} \\ &= \frac{p}{2} - \frac{p(1 + q)}{2q} + \frac{(1 + q)}{2qp} \\ &= -\frac{p}{2q} + \frac{1 + q}{2pq} = \frac{1}{2pq} (-p^2 + 1 + q) \\ &= \frac{1}{2pq} ((1 - p)(1 + p) + q) \end{aligned}$$

$$E(Z) = \frac{2 + p}{2p}.$$

2-c)

$\lfloor Y \rfloor \in \{0, 1\}$. L'événement $\lfloor Y \rfloor = 2$ a une probabilité nulle car il équivaut à $Y = 2$.

$$P(\lfloor Y \rfloor = 0) = P(0 \leq Y < 1) = \frac{1}{2} \text{ et de même } P(\lfloor Y \rfloor = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\lfloor Y \rfloor \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2} : E(\lfloor Y \rfloor) = \frac{1}{2}$$

2-d)

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$; pour tout entier $x \in \mathbb{N}$, $x + \lfloor y \rfloor \leq x + y < (x + \lfloor y \rfloor) + 1$. Et comme $x + \lfloor y \rfloor$ est un entier, cet encadrement désigne $x + \lfloor y \rfloor$ comme la partie entière de $x + y$.

$Z = \lfloor X + Y \rfloor = X + \lfloor Y \rfloor$ puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Remarquons que X et Y indépendantes implique X et $\lfloor Y \rfloor$ indépendantes.

- $P(Z = 1) = P(X + \lfloor Y \rfloor = 1) = (X = 1 \cap \lfloor Y \rfloor = 0)$
 $= P(X = 1) \times P(\lfloor Y \rfloor = 0)$ par indépendance
 $= \frac{p}{2}$

- pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + \lfloor Y \rfloor = k) = P\left(X = k \cap \lfloor Y \rfloor = 0 \cup (X = k - 1 \cap \lfloor Y \rfloor = 1)\right) \\ &= P(X = k \cap \lfloor Y \rfloor = 0) + P(X = k - 1 \cap \lfloor Y \rfloor = 1) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(X = k) \times P(\lfloor Y \rfloor = 0) + P(X = k - 1) \times P(\lfloor Y \rfloor = 1) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2}pq^{k-1} + \frac{1}{2}pq^{k-2} = \frac{pq^{k-2}(1+q)}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien la loi de Z

$Z = X + \lfloor Y \rfloor$. D'autre part X et $\lfloor Y \rfloor$ admettent des espérances, donc Z aussi et

$$E(Z) = E(X) + E(\lfloor Y \rfloor) = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{p+2}{2p}.$$