VAR A DENSITE.14. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–14

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, admettant toutes une même densité f, continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive. On note F leur fonction de répartition.

On pose $U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V_n = F(U_n)$.

Déterminer la fonction de répartition de U_n et celle de V_n. Que remarque-t-on ?

Eléments de correction : 14.

- Détermination de la fonction de répartition F_n de U_n

Notons F la fonction de répartition commune des X_k pour $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) &= P(U_n \leq x)\\
&= 1 - P(U_n > x)\\
&= 1 - P(X_1 > x \cap X_2 > x \cap \cdots \cap X_n > x)\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \qquad \text{par indépendance des variables}\\
&= 1 - \Big(P(X_1 > x)\Big)^n \qquad \text{les variables suivent la même loi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n}$$

- Détermination de la fonction de répartition G_n de $V_n = F(U_n)$

On sait, d'après le cours, que F est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante puisque $f > 0$. Il en résulte que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$.

Donc, $V_n(\Omega) =]0;1[$ et par conséquent,

$\forall x \leq 0,\ G_n(x) = 0$ et $\forall x \geq 1,\ G_n(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0;1[,\ G_n(x) &= P(F(U_n) \leq x)\\
&= P(F^{-1}(F(U_n)) \leq F^{-1}(x)) \qquad \text{car } F^{-1} \text{ est strictement croissante}\\
&= P(U_n \leq F^{-1}(x))\\
&= F_n(F^{-1}(x))\\
&= 1 - (1 - F(F^{-1}(x)))^n \qquad \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

$$\forall x \in]0;1[,\ G_n(x) = 1 - (1-x)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

On remarque que la loi de V_n est indépendante de celle des X_k.