VARIABLES A DENSITE 8. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

On considère une suite de variables $(X_k)_{k>0}$ mutuellement indépendantes, définies sur Ω, de même loi exponentielle de paramètre 1. Soit N une variable aléatoire, définie sur Ω, suivant la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $p \in]0,1[$, et indépendante des variables X_k pour tout k.

On définit, pour tout $\omega \in \Omega$, la variable U par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) = \min_{1 \leq k \leq N(\omega)} (X_k(\omega)).$$

Déterminer la loi de U (fonction de répartition et densité).

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - var à densité 8.

Calculer $P_{N=n}(U > x)$ pour $x > 0$, puis $P(U > x)$; déterminer $P(U > x)$ quand $x \leq 0$ et en déduire la fonction de répartition de U.

On trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - qe^{-x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

var à densité 8.

Par indépendance des variables X_k, on a :

$$\begin{aligned}\forall n\geq 1,\ P_{N=n}(U>x) &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k>x)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\Big(\int_x^{+\infty} e^{-t}dt\Big)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\Big(\lim_{y\to+\infty}\int_x^{y} e^{-t}dt\Big)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\Big(\lim_{y\to+\infty}(-e^{-y}+e^{-x})\Big)\\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{-x} = e^{-nx}\end{aligned}$$

si $x\leq 0,\ (U>x)=\Omega$ puisque $U(\Omega)=\mathbb{R}_+$, donc $P(U>x)=1$.

Utilisons le système complet d'événements $(N=n)_{n\geq 1}$: d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\text{si } x>0, P(U>x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{N=n}(U>x)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}P_{N=n}(U>x)\\ P(U>x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}e^{-nx}\\ &= pe^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}(qe^{-x})^{n-1}\\ &= pe^{-x}\sum_{j=0}^{+\infty}(qe^{-x})^{j}\\ &= pe^{-x}\frac{1}{1-qe^{-x}} = \frac{pe^{-x}}{1-qe^{-x}}\end{aligned}$$

En effet, il s'agit de sommer une série géométrique convergente puisque sa raison $qe^{-x}\in\,]0,1[$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_U(x)=1-P(U>x)$, d'où le résultat :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_U(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ 1-\dfrac{pe^{-x}}{1-qe^{-x}}=\dfrac{1-e^{-x}}{1-qe^{-x}} & \text{si } \quad x>0\end{cases}$$

Pour une densité f_U de U, on dérive F_U sur $\mathbb{R}_*$ et on prend $f_U(0)=0$, ce qui donne

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_U(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{pe^{-x}}{(1-qe^{-x})^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021