VARIABLES A DENSITE 8. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

On considère une suite de variables $(X_k)_{k>0}$ mutuellement indépendantes, définies sur Ω, de même loi exponentielle de paramètre 1. Soit N une variable aléatoire, définie sur Ω, suivant la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $p \in]0,1[$, et indépendante des variables X_k pour tout k.

On définit, pour tout $\omega \in \Omega$, la variable U par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) = \min_{1 \leq k \leq N(\omega)} (X_k(\omega)).$$

Déterminer la loi de U (fonction de répartition et densité).

Indications - var à densité 8.

Calculer $P_{N=n}(U > x)$ pour $x > 0$, puis $P(U > x)$; déterminer $P(U > x)$ quand $x \leq 0$ et en déduire la fonction de répartition de U.

On trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - qe^{-x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

var à densité 8.

Par indépendance des variables X_k, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ P_{N=n}(U > x) &= \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(\int_x^{+\infty} e^{-t} dt \Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(\lim_{y \to +\infty} \int_x^{y} e^{-t} dt \Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(\lim_{y \to +\infty} (-e^{-y} + e^{-x}) \Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{-x} = e^{-nx}
\end{aligned}$$

si $x \leq 0$, $(U > x) = \Omega$ puisque $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc $P(U > x) = 1$.

Utilisons le système complet d'événements $(N = n)_{n \geq 1}$: d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\text{si } x > 0, P(U > x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{N=n}(U > x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} P_{N=n}(U > x) \\
P(U > x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} e^{-nx} \\
&= pe^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} (qe^{-x})^{n-1} \\
&= pe^{-x} \sum_{j=0}^{+\infty} (qe^{-x})^{j} \\
&= pe^{-x} \frac{1}{1 - qe^{-x}} = \frac{pe^{-x}}{1 - qe^{-x}}
\end{aligned}$$

En effet, il s'agit de sommer une série géométrique convergente puisque sa raison $qe^{-x} \in]0, 1[$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = 1 - P(U > x)$, d'où le résultat :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{pe^{-x}}{1 - qe^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - qe^{-x}} & \text{si } \quad x > 0 \end{cases}$$

Pour une densité f_U de U, on dérive F_U sur $\mathbb{R}_*$ et on prend $f_U(0) = 0$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{pe^{-x}}{(1 - qe^{-x})^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$