



**VARIABLES A DENSITE 2. HEC ESCP**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-2**

Soit  $X$  une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ . On note  $f$  une densité de  $X$ .

- 1) Justifier et calculer, pour tout  $z \in \mathbb{R}$ ,  $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx)f(x)dx$ .
- 2) Vérifier que  $G$  est une fonction de répartition d'une variable à densité.

**Indications - var à densité.2**

1) On trouve  $G(z) = 0$  si  $z \leq 0$  et  $G(z) = \frac{z}{z+1}$  si  $z \geq 0$ .

**Eléments de correction : var à densité.2**

Une densité de la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$  est  $f$  définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x) = \alpha \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

Rappelons que la fonction de répartition de  $X$  est  $F$  définie par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

• La fonction  $x \mapsto xz$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc par composition, la fonction  $x \mapsto F(xz) = P(X \leq xz)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  .

On remarque que  $P(X \leq xz)f(x) = 0$  pour  $x < 0$  (à cause de  $f$ ) donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx = \int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx \text{ sous réserve de convergence, bien-sûr.}$$

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$  est impropre uniquement en  $+\infty$  puisque la fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc la fonction  $x \mapsto P(X \leq xz)f(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a  $0 \leq P(X \leq xz)f(x) \leq f(x)$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  converge (et vaut 1 d'ailleurs).

On applique alors le théorème de comparaison des fonctions continues positives sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  et on conclut que

**l'intégrale  $\int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$  converge.**

- Si  $z \leq 0$  et  $x \geq 0$ , alors  $xz \leq 0$  et  $P(X \leq xz) = 0$ .
- Si  $z \geq 0$  et  $x \geq 0$ , alors  $P(X \leq xz) = 1 - \exp(-\alpha xz)$

$$G(z) = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-\alpha xz)) \alpha \exp(-\alpha x) dx.$$

Soit  $t \geq 0$ , considérons  $I(t) = \int_0^t (1 - \exp(-\alpha xz)) \alpha \exp(-\alpha x) dx = \int_0^t (1 - (\exp(-\alpha x))^z) \alpha \exp(-\alpha x) dx$ .

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable suivant :

$u(x) = \exp(-\alpha x)$  ;  $du = -\alpha \exp(-\alpha x) dx$  ;  $u$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , le changement de variable est justifié.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^{\exp(-\alpha t)} (-(1 - u^z)) du \\ &= - \left[ u - \frac{u^{z+1}}{z+1} \right]_1^{\exp(-\alpha t)} \\ &= - \exp(-\alpha t) + \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} + 1 - \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-\alpha t) = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} = 0$  car  $z+1 > 0$ .

$$G(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 1 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1}$$

$$\text{En résumé : } G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{z}{z+1} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

• La fonction  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  de manière évidente ; elle est continue en 0 car  $\lim_{z \rightarrow 0^+} G(z) = \lim_{z \rightarrow 0^-} G(z) = 0 = G(0)$

La fonction  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  de manière tout aussi évidente :

$$\forall z < 0, G'(z) = 0 \text{ et } \forall z > 0, G'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} > 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$
$G$	$0$	$\rightarrow$	$0$	$\nearrow$	$1$

En résumé,  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , croissante,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} G(z) = 0$  et  $\lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) = 1$

$G$  est la fonction de répartition d'une variable à densité