VARIABLES A DENSITE 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. On considère $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Var à densité.1

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$ et $E(Y) = \dfrac{1}{e^{\lambda}-1}\cdot$

Eléments de correction : Var à densité.1

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ (Y = n) \iff \lfloor X \rfloor = n \iff n \leq X < n+1$. Donc

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(n \leq X < n+1) \\ &= P(n \leq X \leq n+1) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\ &= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \Big[-e^{-\lambda t} \Big]_n^{n+1} \\ &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$$

$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$ sous réserve de convergence de la série (la convergence absolue est superflue puisque la série est à termes positifs).

Or $ne^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda}) = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times ne^{-\lambda(n-1)} = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$

$n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ est le terme général de la dérivée de la série géométrique $\sum \Big(e^{-\lambda}\Big)^n$. Cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $]-1,1[$.

La série de terme général $n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ converge et par conséquent la série $\sum (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ également.

La variable Y admet une espérance

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1} \\ &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^2} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Et en multipliant haut et bas par e^{λ}, on trouve $E(Y) = \dfrac{1}{e^{\lambda} - 1}$