VARIABLES A DENSITE 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. On considère $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

Déterminer la loi de Y et son espérance.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$ et $E(Y) = \dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Var à densité.1

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ (Y = n) \iff \lfloor X \rfloor = n \iff n \leq X < n+1$. Donc

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= P(n \leq X < n+1) \\ &= P(n \leq X \leq n+1) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\ &= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \Big[-e^{-\lambda t} \Big]_n^{n+1} \\ &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$$

$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$ sous réserve de convergence de la série (la convergence absolue est superflue puisque la série est à termes positifs).

Or $ne^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda}) = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times ne^{-\lambda(n-1)} = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$

$n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ est le terme général de la dérivée de la série géométrique $\sum \Big(e^{-\lambda}\Big)^n$. Cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $]-1,1[$.

La série de terme général $n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ converge et par conséquent la série

$\sum (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ également.

La variable Y admet une espérance

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1} \\ &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times \frac{1}{(1-e^{-\lambda})^2} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Et en multipliant haut et bas par e^{λ}, on trouve $E(Y) = \dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021