



VARIABLES A DENSITE 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ . On considère $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Var à densité.1

On trouve $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$ et $E(Y) = \frac{1}{e^\lambda - 1}$.

Eléments de correction : Var à densité.1

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, (Y = n) \iff \lfloor X \rfloor = n \iff n \leq X < n + 1$. Donc

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(n \leq X < n + 1) \\ &= P(n \leq X \leq n + 1) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\ &= \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_n^{n+1} \\ &= e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$$

$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$ sous réserve de convergence de la série (la convergence absolue est superflue puisque la série est à termes positifs).

Or $n e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n e^{-\lambda(n-1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n(e^{-\lambda})^{n-1}$

$n(e^{-\lambda})^{n-1}$ est le terme général de la dérivée de la série géométrique $\sum (e^{-\lambda})^n$. Cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $] - 1, 1[$.

La série de terme général $n(e^{-\lambda})^{n-1}$ converge et par conséquent la série

$\sum (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times n(e^{-\lambda})^{n-1}$ également.

La variable Y admet une espérance

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n(e^{-\lambda})^{n-1} \\ &= (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda} \times \frac{1}{(1 - e^{-\lambda})^2} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

Et en multipliant haut et bas par e^λ , on trouve $E(Y) = \frac{1}{e^\lambda - 1}$