SUITES REELLES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Montrer que la suite des entiers naturels non nuls est la seule suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs à vérifier la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

Jean MALLET

La suite des entiers naturels non nuls vérifie cette relation car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

• Pour $n = 1$, on a $a_1^3 = a_1^2$ c'est-à-dire $a_1^2(a_1 - 1) = 0$ ce qui donne $a_1 = 1$ puisque $a_1 > 0$.

• Faisons une récurrence forte : soit P_n, $(n \geq 1)$ la propriété : pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$.

Cette propriété est satisfaite pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit satisfaite pour un entier n non nul donné.

Par hypothèse $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + a_{n+1}^3 \\
\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)
\end{aligned}$$

Car d'après l'hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$.

L'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2$ s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^3 + a_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)$, donc $a_{n+1}^3 = +a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)$ puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$.

Après avoir simplifié par $a_{n+1} \neq 0$, on obtient : $a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n(n+1) = 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 + 4n(n+1) = (2n+1)^2$. On a donc deux solutions :

$a_{n+1} = \dfrac{1 + (2n+1)}{2} = n + 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{1 - (2n+1)}{2} = -n < 0$ qui ne convient pas.

Donc $a_{n+1} = n + 1$.

La propriété est héréditaire.

En effet la propriété P_{n+1} est : pour tout entier $k \in [\![1, n+1]\!]$, $a_k = k$. D'après l'hypothèse de récurrence, P_n, on a déjà pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$; on vient de montrer que $a_{n+1} = n + 1$, donc on a bien montré P_{n+1}.

Par principe du raisonnement pas récurence, la propriété P_n est satisfaite pour tout entier $n \geq 1$.

La seule suite de réels > 0 vérifiant $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ est la suite des entiers naturels non nuls.

