SUITES REELLES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Montrer que la suite des entiers naturels non nuls est la seule suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs à vérifier la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : suites.1

La suite des entiers naturels non nuls vérifie cette relation car $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

- Pour $n = 1$, on a $a_1^3 = a_1^2$ c'est-à-dire $a_1^2(a_1 - 1) = 0$ ce qui donne $a_1 = 1$ puisque $a_1 > 0$.
- Faisons une récurrence forte : soit P_n, $(n \geq 1)$ la propriété : pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$.

Cette propriété est satisfaite pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit satisfaite pour un entier n non nul donné.

Par hypothèse $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + a_{n+1}^3 \\
\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)
\end{aligned}$$

Car d'après l'hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$, donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)}{2}$.

L'égalité $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2$ s'écrit $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 + a_{n+1}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)$, donc $a_{n+1}^3 = +a_{n+1}^2 + a_{n+1}n(n+1)$ puisque $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$.

Après avoir simplifié par $a_{n+1} \neq 0$, on obtient : $a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n(n+1) = 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 + 4n(n+1) = (2n+1)^2$. On a donc deux solutions :

$a_{n+1} = \frac{1 + (2n+1)}{2} = n + 1$ et $a_{n+1} = \frac{1 - (2n+1)}{2} = -n < 0$ qui ne convient pas.

Donc $a_{n+1} = n + 1$.

La propriété est héréditaire.

En effet la propriété P_{n+1} est : pour tout entier $k \in [\![1, n+1]\!]$, $a_k = k$. D'après l'hypothèse de récurrence, P_n, on a déjà pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = k$; on vient de montrer que $a_{n+1} = n + 1$, donc on a bien montré P_{n+1}.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Par principe du raisonnement pas récurence, la propriété P_n est satisfaite pour tout entier $n \geq 1$.

La seule suite de réels > 0 vérifant $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ est la suite des entiers naturels non nuls.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021