



MATRICES 3. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-3

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Montrer que $A + B = AB \implies AB = BA$.

Indications - matrices 3.

On pourra montrer que $A - I$ est inversible.

Eléments de correction : matrices 3.

$$\begin{aligned}AB = A + B &\iff A(B - I) = B \\&\iff A(B - I) - I = B - I \\&\iff A(B - I) - (B - I) = I \\&\iff (A - I)(B - I) = I\end{aligned}$$

On conclut que $(A - I)$ est inversible et que $(B - I)$ est son inverse ; donc $A - I$ et $B - I$ commutent.

$$\begin{aligned}(A - I)(B - I) = (B - I)(A - I) &\iff AB - A - B + I = BA - B - A + I \\&\iff AB = BA\end{aligned}$$