MATRICES 2. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier k naturel non nul tel que $A^k = (0)$ où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice $B = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$ est inversible et déterminer son inverse.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$.

Eléments de correction : matrices.2

- On a : $(I-A)(I+A+\cdots+A^{k-1}) = I-A^k = I$ puisque $A^k = (0)$, c'est-à-dire $(I-A)B = I$.

Donc B est inversible et $B^{-1} = I - A$.

- Soit D l'endomorphisme de dérivation de $E = \mathbb{R}_5[X]$: $\forall Q \in \mathbb{R}_5[X],\ D(Q) = Q'$.

Comme deg $(Q) \leq 5$, on en déduit que $D^6 = 0$.

Donc l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + D + \cdots + D^5$ est inversible et son inverse est $\mathrm{Id}_E - D$.

L'égalité $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$ équivaut à $(\mathrm{Id}_E + D + \cdots + D^5)P = X^5$ qui équivaut à $(\mathrm{Id} - D)X^5 = P$.

L'équation $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$ **a une unique solution** $P = X^5 - 5X^4$.