MATRICES 1. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A ou B soit inversible.
Déterminer les réels μ pour lesquels la matrice $C = A + \mu B$ est inversible.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - matrices.1

Etablir que le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si les deux le sont.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : matrices.1

- **Lemme :** montrons que si C et D sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors CD inversible équivaut à C et D inversibles.

Sens réciproque : c'est du cours : le produit de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

Sens direct : plaçons nous dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique et associons à C et D deux endomorphismes f et g respectivement.

Supposons que D ne soit pas inversible. Cela veut dire que g n'est pas bijectif, donc pas injectif. Il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $g(x) = 0$. On a alors $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$, ce qui permet de conclure que $f \circ g$ n'est pas bijectif, donc CD n'est pas inversible et cela est contraire à l'hypothèse.

Donc CD inversible implique D inversible. On peut écrire $C = (CD)D^{-1}$, donc C est inversible comme produit de deux matrices inversibles.

On a montré CD inversible implique C et D inverisbles, d'où l'équivalence.

Remarque : au passage, par une récurrence facile, on peut montrer que le produit de k matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si les k matrices le sont.

- Si A est inversible.
  - $\mu = 0$, alors $C = A$ donc C est inversible.
  - $\mu \neq 0$, alors $C = \mu A(\left(\frac{1}{\mu}I + A^{-1}B\right)$.

Comme μA est inversible on peut affirmer : C inversible si et seulement si $\frac{1}{\mu}I + A^{-1}B$ est inversible donc si et seulement si $-\frac{1}{\mu} \notin \text{spect}(A^{-1}B)$.

- Si B est inversible.

Alors $C = B(B^{-1}A + \mu I)$

Donc C inversible si et seulement si $B^{-1}A + \mu I$ est inversible donc si et seulement si $-\mu \notin \text{spect}(B^{-1}A)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021