

**VARIABLES DISCRETES 3. HEC ESCP****ENONCE DE L'EXERCICE****ENONCE-3**

Soit (Ω, \mathcal{T}, P) un espace probabilisé

Soient X_1, X_2 deux variables réelles, indépendantes, définies sur Ω , suivant chacune la loi de Poisson de paramètre λ . Soit Y une variable indépendante de X_1 et de X_2 telle que

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $Z_1 = X_1Y$ et $Z_2 = X_2Y$.

- 1) Montrer que Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes.
- 2) Montrer que Z_1^2 et Z_2^2 sont indépendantes.

Indications - var discrètes 3.

- Calculer $\text{cov}(Z_1, Z_2)$.

Eléments de correction : var discrètes 3.

1) On remarque que Y^2 est la variable certaine égale à 1.

$$\begin{aligned}\text{cov}(Z_1, Z_2) &= E(Y^2 X_1 X_2) - E(Y X_1)E(Y X_2) \\ &= E(X_1 X_2) - E(Y)E(X_1)E(Y)E(X_2) \quad \text{par indépendance de } Y, X_1 \text{ et } Y, X_2 \\ &= E(X_1)E(X_2) \quad \text{car } E(Y) = 0\end{aligned}$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = \lambda^2$$

$\text{cov}(Z_1, Z_2) \neq 0 \implies Z_1$ et Z_2 non indépendantes

2) $Z_1^2 = X_1^2$ et $Z_2^2 = X_2^2$ car Y^2 est la variable certaine égale à 1.

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on sait que X_1^2 et X_2^2 le sont aussi, car si deux variables sont indépendantes, toute fonction de l'une est indépendante de toute fonction de l'autre.

Z_1^2 et Z_2^2 sont indépendantes.