VARIABLES DISCRETES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires définies sur Ω, discrètes, indépendantes, de même loi dont l'ensemble des valeurs est $[\![1,6]\!]$. La moyenne de X_1 et X_2 peut-elle suivre une loi uniforme ?

Eléments de correction : var discrètes.2

Notons S la somme des numéros obtenus et M leur moyenne.

$S(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}^* \ / \ 2 \leq k \leq 12\}$ et $M(\Omega) = \{\frac{k}{11} \in \mathbb{N}^* \ / \ 2 \leq k \leq 12\}$ car card $S(\Omega) = 11$.

M suit la loi uniforme sur $M(\Omega)$ revient à dire que S suit la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$, car $(M = \frac{k}{11}) = (S = k)$.

• $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$ par indépendance des variables X_1 et X_2, puis $P(S = 2) = (P(X_1 = 1))^2$ puisque X_1 et X_2 suivent la même loi. Or $P(S = 2) = \frac{1}{11}$, donc on obtient

$(P(X_1 = 1))^2 = \frac{1}{11}$, ce qui donne $P(X_1 = 1) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Par raison de symétrie, $(S = 12) = (X_1 = 6 \cap X_2 = 6)$, on déduit $P(X_1 = 6) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

• $P(S = 3) = P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1))$. Les deux événements sont incompatibles, puis les variables sont indépendantes et suivent la même loi,

$P(S = 3) = 2P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 2)$;

ce qui donne $\frac{1}{11} = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 2)$, donc $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2\sqrt{11}}$.

Par raison de symétrie, $P(S = 11) = 2P(X_1 = 5)P(X_1 = 6)$, d'où $P(X_1 = 5) = \frac{1}{2\sqrt{11}}$.

• $(S = 4) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 3) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 3 \cap X_2 = 1)$. Pour des raisons déjà données, on obtient

$\frac{1}{11} = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 3) + (P(X_1 = 2))^2$; et par conséquent,

$\frac{1}{11} = 2\frac{1}{\sqrt{11}}P(X_1 = 3) + \frac{1}{4 \times 11}$: $P(X_1 = 3) = \frac{3}{8\sqrt{11}}$.

Et par symétrie, $P(X_1 = 4) = \frac{3}{8\sqrt{11}}$.

$$\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k) = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(2 + 1 + \frac{3}{4}\right) \neq 1.$$

La moyenne de X_1 et X_2 ne peut pas suivre une loi uniforme