VARIABLES DISCRETES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

On désigne par $[x]$ la partie entière du réel x.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n^k}{2^{k-1}k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \exp(\frac{n}{2})$.

Indications - var discrètes 1.

On pourra penser au théorème de la limite centrée et faire intervenir une loi classique.

Eléments de correction : var discrètes 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et considérons $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω telle que $\forall n \geq 1$, la variable X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{n}{2}$.

La variable X_n peut être considérée comme la somme de n variables de Poisson, indépendantes, de même paramètre $\frac{1}{2}$. On peut donc appliquer à X_n le théorème de la limite centrée. La variable centrée réduite associée à X_n est $X_n^* = \dfrac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$; cette variable converge en loi vers une variable X^* qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n^* \leq 0) = P(X^* \leq 0) = \Phi(0)$ (où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n^* \leq 0) = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}(X_n^* \leq 0) &= \Big(\frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \leq 0\Big) \\ &= (X_n - \frac{n}{2} \leq 0) \\ &= (X_n \leq \frac{n}{2}) \\ &= (X_n \leq [\frac{n}{2}])\end{aligned}$$

car X_n prend des valeurs entières et la plus grande valeur entière inférieure ou égale à $\frac{n}{2}$ prise par X_n est par définition $[\frac{n}{2}]$.

On peut aussi écrire $(X_n \leq [\frac{n}{2}]) = \bigcup\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (X_n = k)$, union d'événements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned}P(X_n \leq [\frac{n}{2}]) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \exp(-\frac{n}{2}) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} \\ &= \exp(-\frac{n}{2}) \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n^* \leq 0) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \exp(-\frac{n}{2}) \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Puisque cette limite n'est pas nulle, on a $\exp(-\frac{n}{2}) \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2}$, ou encore

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\exp(\frac{n}{2})}{2}$$

Or $\dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} = \dfrac{1}{2^k}\dfrac{n^k}{k!}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \dfrac{1}{2^k}\dfrac{n^k}{k!}$. Il vient donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \dfrac{1}{2^k}\dfrac{n^k}{k!} \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\exp(\frac{n}{2})}{2}$, et après avoir simplifier des deux cotés par $\frac{1}{2}$, on obtient le résultat demandé :

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2^{k-1}}\frac{n^k}{k!} \underset{(+\infty)}{\sim} \exp(\tfrac{n}{2})$$