SERIES REELLES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n a^{\cos \pi n}}{n}$ $(n \geq 1)$

Jean MALLET

Indications - Séries réelles.1

Dans le cas $x = -1$, faire intervenir la série harmonique alternée.

On trouve :

convergence quand $|x| < 1$.

convergence quand $x = -1, \ a = 1$

divergence quand $|x| > 1$.

divergence quand $x = 1$ et quand $x = -1$ et $a \neq 1$.

Comme $\cos n\pi = \pm 1$, alors $a^{\cos n\pi} = a$ ou $\frac{1}{a}$

Si l'on pose $B = \min(a, \frac{1}{a})$ et $A = \max(a, \frac{1}{a})$, on a l'encadrement $0 < B \leq a^{\cos n\pi} \leq A$.

- Si $|x| < 1$, on a $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \leq A\frac{|x|^n}{n} \leq A|x|^n$

La série de terme général $A|x|^n$ est convergente (série géométrique de raison $|x| < 1$). Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Pour $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente

- Si $|x| > 1$, on a $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq B\frac{|x|^n}{n}$.

$\frac{|x|^n}{n} = \frac{\exp(n \ln |x|)}{\exp(\ln n)} = \exp(n \ln |x| - \ln n)$. Par croissances comparées,

$\lim_{n\to+\infty} (n \ln |x| - \ln n) = +\infty$ puisque $\ln |x| > 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$.

$\lim_{n\to+\infty} B\frac{|x|^n}{n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$

Pour $|x| > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$; la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

- Pour $x = 1$, $u_n = \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq \frac{B}{n} > 0$.

La série de terme général $\frac{B}{n}$ est un multiple non nul de la série harmonique, donc elle diverge. Par comparaison des séries à termes positifs, on conclut :

Pour $x = 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.

- Pour $x = -1$; $u_n = \frac{(-1)^n a^{\cos n\pi}}{n}$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $H'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k a^{\cos k\pi}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k} a^{\cos 2k\pi}}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1} a^{\cos(2k-1)\pi}}{2k-1} \\
&\quad \text{on a séparé les indices pairs et les indices impairs} \\
&= a \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\
&= a \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} \\
&\qquad + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\
&= \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}
$$

Finalement $S_{2n} = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})H_n - \frac{1}{a}H'_{2n}$, car $(-1)^k = -(-1)^{k-1}$;

$$S_{2n} = \frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, qui s'appelle série harmonique alternée, converge ; c'est un résultat classique que nous établirons en fin d'exposé pour les étudiants qui ne le connaissent pas. Donc la suite (H'_n) est convergente.

La série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente d'après le critère de Riemann (c'est la série harmonique). La suite (H_n) est divergente et tout multiple **non nul** de H_n est une suite divergente.

Ce qui amène au résultat suivant :

Si $a \neq 1$, alors $\frac{a^2-1}{2a} \neq 0$; la suite $(\frac{a^2-1}{2a}H_n)$ diverge ; comme la suite $(\frac{1}{a}H'_{2n})$, converge, on conclut que la suite $(\frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n})$ diverge.

$*$ $a \neq 1 \Longrightarrow (S_{2n})$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $a = 1$, alors $S_{2n} = -H'_{2n}$. D'ailleurs, dans ce cas $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; donc la série $\sum u_n$ converge.

Pour $x = -1$, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$

En résumé, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$ ou $x = -1$ et $a = 1$.

NB Convergence de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

L'idée : montrer que les sommes partielles d'indices pairs et impairs sont adjacentes et conclure que la suite (H'_n) converge.

$H'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$H'_{2n+2} - H'_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0.$

(H'_{2n}) est croissante

$H'_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$H'_{2n+1} - H'_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0.$

(H'_{2n+1}) est décroissante

$H'_{2n+1} - H'_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$

Les 2 suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite réelle ℓ. On conclut que la suite (H'_n) converge aussi vers ℓ donc que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Pour information $\ell = \ln 2$.