



**SERIES REELLES 1. HEC ESCP**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-1**

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{x^n a^{\cos \pi n}}{n}$  ( $n \geq 1$ )

### Indications - Séries réelles.1

Dans le cas  $x = -1$ , faire intervenir la série harmonique alternée.

On trouve :

convergence quand  $|x| < 1$ .

convergence quand  $x = -1$ ,  $a = 1$

divergence quand  $|x| > 1$ .

divergence quand  $x = 1$  et quand  $x = -1$  et  $a \neq 1$ .

**Eléments de correction : séries réelles.1**

Comme  $\cos n\pi = \pm 1$ , alors  $a^{\cos n\pi} = a$  ou  $\frac{1}{a}$

Si l'on pose  $B = \min(a, \frac{1}{a})$  et  $A = \max(a, \frac{1}{a})$ , on a l'encadrement  $0 < B \leq a^{\cos n\pi} \leq A$ .

- Si  $|x| < 1$ , on a  $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \leq A \frac{|x|^n}{n} \leq A|x|^n$

La série de terme général  $A|x|^n$  est convergente (série géométrique de raison  $|x| < 1$ ). Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général  $|u_n|$  est convergente.

**Pour  $|x| < 1$ , la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente**

- Si  $|x| > 1$ , on a  $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq B \frac{|x|^n}{n}$ .

$\frac{|x|^n}{n} = \frac{\exp(n \ln |x|)}{\exp(\ln n)} = \exp(n \ln |x| - \ln n)$ . Par croissances comparées,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \ln |x| - \ln n) = +\infty$  puisque  $\ln |x| > 0$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} B \frac{|x|^n}{n} = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$

**Pour  $|x| > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$  ; la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.**

- Pour  $x = 1$ ,  $u_n = \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq \frac{B}{n} > 0$ .

La série de terme général  $\frac{B}{n}$  est un multiple non nul de la série harmonique, donc elle diverge. Par comparaison des séries à termes positifs, on conclut :

**Pour  $x = 1$ , la série  $\sum u_n$  est divergente.**

- Pour  $x = -1$  ;  $u_n = \frac{(-1)^n a^{\cos n\pi}}{n}$ .

Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  et  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  et  $H'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k a^{\cos k\pi}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k} a^{\cos 2k\pi}}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1} a^{\cos(2k-1)\pi}}{2k-1} \\ &\text{on a séparé les indices pairs et les indices impairs} \\ &= a \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\ &= a \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{2k} - \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{2k} \\ &\quad + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\ &= \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

Finalement  $S_{2n} = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})H_n - \frac{1}{a}H'_{2n}$ , car  $(-1)^k = -(-1)^{k-1}$  ;

$$S_{2n} = \frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n}$$

La série de terme général  $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ , qui s'appelle série harmonique alternée, converge ; c'est un résultat classique que nous établirons en fin d'exposé pour les étudiants qui ne le connaissent pas. Donc la suite  $(H'_n)$  est convergente.

La série de terme général  $\frac{1}{k}$  est divergente d'après le critère de Riemann (c'est la série harmonique). La suite  $(H_n)$  est divergente et tout multiple **non nul** de  $H_n$  est une suite divergente.

Ce qui amène au résultat suivant :

Si  $a \neq 1$ , alors  $\frac{a^2-1}{2a} \neq 0$  ; la suite  $(\frac{a^2-1}{2a}H_n)$  diverge ; comme la suite  $(\frac{1}{a}H'_{2n})$ , converge, on conclut que la suite  $(\frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n})$  diverge.

\*  $a \neq 1 \implies (S_{2n})$  diverge, donc la série  $\sum u_n$  diverge.

Si  $a = 1$ , alors  $S_{2n} = -H'_{2n}$ . D'ailleurs, dans ce cas  $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{(-1)^{n-1}}{n}$  ; donc la série  $\sum u_n$  converge.

**Pour  $x = -1$ , la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $a = 1$**

**En résumé, la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $x \in ]-1, 1[$  ou  $x = -1$  et  $a = 1$ .**

**NB Convergence de la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$**

L'idée : montrer que les sommes partielles d'indices pairs et impairs sont adjacentes et conclure que la suite  $(H'_n)$  converge.

$$H'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

$$H'_{2n+2} - H'_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0.$$

$(H'_{2n})$  est croissante

$$H'_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

$$H'_{2n+1} - H'_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0.$$

$(H'_{2n+1})$  est décroissante

$$H'_{2n+1} - H'_{2n} = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

Les 2 suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite réelle  $\ell$ . On conclut que la suite  $(H'_n)$  converge aussi vers  $\ell$  donc que la série  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  converge.

Pour information  $\ell = \ln 2$ .