



FONCTIONS REELLES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

Soit  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$ .

- 1) Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
- 2) Montrer que les nombres dérivés  $f^{(n)}(0)$  d'ordre impair sont nuls sauf lorsque  $n$  est un multiple de 3.

**Indications - fonctions 2.**

1)  $D_f = ]-1, +\infty[$

2) Penser aux développements limités et pour ce faire écrire autrement  $f(x)$  en faisant intervenir des sommes de suites géométriques.

**Eléments de correction : fonctions 2.**

1)  $f(x)$  existe si et seulement si  $x + 1 \neq 0$  et  $x + \frac{1}{x+1} > 0$ .

$x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ . Cette fraction est du signe de  $x + 1$  puisque  $x^2 + x + 1$  n'a pas de racines réelles (son discriminant est  $-3$ ).

$$D_f = ]-1, +\infty[$$

2) L'application  $x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D_f$  (comme somme de fonctions qui le sont) et à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . L'application  $\ln$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ , donc par composition,  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $D_f$ .

Il en résulte que  $f$  admet en 0 un développement limité à n'importe quel ordre. Ce développement peut être obtenu par Taylor ;

$\forall n \in \mathbb{N}$ , le coefficient de  $x^n$  dans ce développement est  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Calculons ce développement et pour cela transformons un peu l'écriture de  $f(x)$ .

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad x + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{\frac{1-x^3}{1-x}}{\frac{1-x^2}{1-x}} = \frac{1-x^3}{1-x^2}.$$

Puisque  $1 - x^3$  et  $1 - x^2$  sont  $> 0$  sur  $] -1, 1[$ , on peut écrire

$$f(x) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x^2)$$

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\ln(1 - x^3) = - \sum_{k / 1 \leq 3k \leq N} \frac{x^{3k}}{3k} + o(x^N)$$

$$\ln(1 - x^2) = - \sum_{k / 1 \leq 2k \leq N} \frac{x^{2k}}{2k} + o(x^N)$$

$$\text{Donc } f(x) = \sum_{k / 1 \leq 2k \leq N} \frac{x^{2k}}{2k} - \sum_{k / 1 \leq 3k \leq N} \frac{x^{3k}}{3k} + o(x^N).$$

On peut déjà affirmer qu'aucun nombre dérivé d'ordre pair n'est nul.

**En effet, si  $n = 2p$ , il y a deux situations :**

\*  $n$  n'est pas multiple de 3, donc n'est pas de la forme  $3k$  ; le terme en  $x^n$  du développement est  $\frac{x^{2p}}{2p}$ , soit  $\frac{x^n}{n}$  ; il se trouve uniquement dans la première somme ;

cela donne  $\frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} = \frac{1}{2p}$ , donc  $f^{(2p)}(0) = \frac{(2p)!}{2p} \neq 0$

\*  $n$  est un multiple de 3, donc  $n$  est un multiple de 6 ;  $n$  s'écrit  $6p$

Le terme en  $x^{6p}$  est  $\frac{x^{2(3p)}}{3p} - \frac{x^{3(2p)}}{2p} = -\frac{x^{6p}}{6p}$ , cela donne  $f^{(6p)}(0) = -\frac{(6p)!}{6p} \neq 0$ .

**Si  $n$  est impair.**

Si c'est un multiple de 3, on trouve  $x^n$  dans la seconde somme mais pas dans la première, donc  $f^{(n)}(0)$  n'est pas nul.

S'il s'écrit  $n = 3k + 1$  ou  $n = 3k + 2$ , on ne trouve de termes en  $x^{3k+1}$  et  $x^{3k+2}$  dans aucune des deux sommes, donc son coefficient dans le développement limité est nul et pas conséquent  $f^{(n)}(0)$  est nul aussi.

$f^{(n)}(0)$  est nul si et seulement si  $n = 3k + 1$  ou  $n = 3k + 2$