FONCTIONS REELLES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Montrer que les nombres dérivés $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nuls sauf lorsque n est un multiple de 3.

Indications - fonctions 2.

1) $D_f =]-1, +\infty[$

2) Penser aux développement limités et pour ce faire écrire autrement $f(x)$ en faisant intervenir des sommes de suites géométriques.

Eléments de correction : fonctions 2.

1) $f(x)$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$ et $x+\dfrac{1}{x+1}>0$.

$x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Cette fraction est du signe de $x+1$ puisque x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (son discriminant est -3).

$$D_f =]-1,+\infty[$$

2) L'application $x \longmapsto x+\dfrac{1}{x+1}$ est de classe C^∞ sur D_f (comme somme de fonctions qui le sont) et à valeurs dans $]0,+\infty[$. L'application ln est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, donc par composition, f est de classe C^∞ sur D_f.

Il en résulte que f admet en 0 un développement limité à n'importe quel ordre. Ce développement peut être obtenu par Taylor ;

$\forall n \in \mathbb{N}$, le coefficient de x^n dans ce développement est $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Calculons ce développement et pour cela transformons un peu l'écriture de $f(x)$.

$\forall x \in]-1,1[,\ x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{\dfrac{1-x^3}{1-x}}{\dfrac{1-x^2}{1-x}}=\dfrac{1-x^3}{1-x^2}$.

Puisque $1-x^3$ et $1-x^2$ sont >0 sur $]-1,1[$, on peut écrire

$f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x^2)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$\ln(1-x^3)=-\displaystyle\sum_{k\ /\ 1\leq 3k\leq N}\frac{x^{3k}}{3k}+o(x^N)$

$\ln(1-x^2)=-\displaystyle\sum_{k\ /\ 1\leq 2k\leq N}\frac{x^{2k}}{2k}+o(x^N)$

Donc $f(x)=\displaystyle\sum_{k\ /\ 1\leq 2k\leq N}\frac{x^{2k}}{2k}-\sum_{k\ /\ 1\leq 3k\leq N}\frac{x^{3k}}{3k}+o(x^N)$.

On peut déjà affirmer qu'aucun nombre dérivé d'ordre pair n'est nul.

En effet, si $n=2p$, il y a deux situations :

$*$ n n'est pas multiple de 3, donc n'est pas de la forme $3k$; le terme en x^n du développement est $\frac{x^{2p}}{2p}$, soit $\frac{x^n}{n}$; il se trouve uniquement dans la première somme ; cela donne $\dfrac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!}=\dfrac{1}{2p}$, donc $f^{(2p)}(0)=\dfrac{(2p)!}{2p}\neq 0$

$*$ n est un multiple de 3, donc n est un multiple de 6 ; n s'écrit $6p$

Le terme en x^{6p} est $\dfrac{x^{2(3p)}}{3p}-\dfrac{x^{3(2p)}}{2p}=-\dfrac{x^{6p}}{6p}$, cela donne $f^{6p}(0)=-\dfrac{(6p)!}{6p}\neq 0$.

Si n est impair.

Si c'est un multiple de 3, on trouve x^n dans la seconde somme mais pas dans la première, donc $f^{(n)}(0)$ n'est pas nul.

S'il s'écrit $n=3k+1$ ou $n=3k+2$, on ne trouve de termes en x^{3k+1} et x^{3k+2} dans aucune des deux sommes, donc son coefficient dans le développement limité est nul et pas conséquent $f^{(n)}(0)$ est nul aussi.

$$f^{(n)}(0)\ \textbf{est nul si et seulement si}\ n=3k+1\ \textbf{ou}\ n=3k+2$$