



FONCTIONS REELLES 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

Comparer π^e et e^π

Eléments de correction : fonctions.1

$\pi^e < e^\pi \iff e \ln \pi < \pi \ln e$ car la fonction \ln est strictement croissante.

$e \ln \pi < \pi \ln e \iff \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$; on a divisé les deux termes de l'inégalité par le produit $\pi \times e > 0$.

Etudions la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Cette fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; cela permet de dresser le tableau de variations de f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
f	$-\infty$	↗	↘ 0

Les limites aux bornes ne sont pas indispensables et d'ailleurs ne posent pas de problèmes.

Sur l'intervalle $[e, +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante ; $e < \pi \iff f(e) > f(\pi)$

Or on a vu que $\pi^e < e^\pi \iff \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$:

donc $\pi^e < e^\pi$