EVENEMENTS 1 HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit Ω un ensemble de cardinal $n \geq 1$ et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ une espace probablisé où P est la probabilité uniforme. On considère une partie B, non vide, donnée de Ω et on considère également les trois événements suivants :

$E_1 =$ " une partie de Ω contient B " .

$E_2 =$ " une partie de Ω est incluse dans B " .

$E_3 =$ " une partie de Ω ne rencontre pas B " .

Etudier l'indépendance des événements E_1, E_2, E_3.

Indications - Evénements.1

On trouvera que E_1, E_2 et E_2, E_3 sont indépendants.

Eléments de correction : Evénements.1

Notons $b = \text{card } B$.

- $E_1 = \{X \subset \Omega \ / \ X \supset B\} = \{X = B \cup Y \ / \ Y \subset \overline{B}\}$

Il y a autant de parties $X \supset B$ que de parties $Y \subset \overline{B}$.
Donc $\text{card } E_1 = \text{card } \overline{B} = 2^{n-b}$.

$$P(E_1) = \frac{2^{n-b}}{2^n} = \frac{1}{2^b}$$

- $E_2 = \{X \subset \Omega \ / \ X \subset B\} = \mathcal{P}(B)$. Il vient tout de suite

$$P(E_2) = \frac{2^b}{2^n}$$

- $E_3 = \{X \subset \Omega \ / \ X \cap B = \emptyset\} = \{X \subset \Omega \ / \ X \subset \overline{B}\} = \mathcal{P}(\overline{B})$

$$P(E_3) = \frac{2^{n-b}}{2^n} = \frac{1}{2^b}$$

⋆⋆ $E_1 \cap E_2 = \{X \subset \Omega \ / \ B \subset X \subset B\} = \{B\}$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^b} \times \frac{2^b}{2^n} = P(E_1) \times P(E_2)$

Les événements E_1 et E_2 sont indépendants

⋆⋆ $E_1 \cap E_3 = \{X \subset \Omega \ / \ B \subset X \text{ et } X \subset \overline{B}\} = \emptyset$.

En effet, s'il existait un ensemble X dans cette intersection, on aurait $B \subset \overline{B}$ ce qui est manifestement impossible puisque B n'est pas vide.

$P(E_1 \cap E_3) = 0 \neq P(E_1) \times P(E_3)$

Les événements E_1 et E_3 ne sont pas indépendants ; ils sont incompatibles

⋆⋆ $E_2 \cap E_3 = \{X \subset \Omega \ / \ X \subset B \text{ et } X \subset \overline{B}\} = \{\emptyset\}$ car s'il existe un élément $x \in X$, on devrait avoir $x \in B$ et $x \in \overline{B}$ ce qui est impossible.

$P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{2^n} = \frac{2^b}{2^n} \times \frac{1}{2^b} = P(E_2) \times P(E_3)$

Les événements E_2 et E_3 sont indépendants