ESPACES VECTORIELS 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), A et B deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

1) $f(A) \cap f(B) = f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$.

2) $f(A) = f(B) \iff A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f$.

Eléments de correction : espaces vectoriels.2

1) On a évidemment $A \subset A + \text{Ker } f$; donc $f(A) \subset f(A + \text{Ker } f)$

De même $B \subset B + \text{Ker } f$, donc $f(B) \subset f(B + \text{Ker } f)$.

Il en résulte que $f(A) \cap f(B) \subset f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$.

Inclusion réciproque.

Soit $y \in f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$; cela veut dire $\exists (a, b, x, x') \in A \times B \times (\text{Ker } f)^2$ tel que $y = f(a + x)$ et $y = f(b + x')$. Donc par linéarité $f(a + x) = f(a) + f(x) = f(a)$ puisque $x \in \text{Ker } f$ et de même $f(b + x') = f(b)$.

Conclusion : $y = f(a) = f(b)$, donc $y \in f(A) \cap f(B)$

$\forall y \in f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f),\ y \in f(A) \cap f(B)$ veut dire

$$f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f) \subset f(A) \cap f(B)$$

Conclusion : $f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f) = f(A) \cap f(B)$

2)

- Sens direct. Hypothèse $f(A) = f(B)$.

Montrons : $A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$.

Soit $x \in A + \text{Ker } f$; il existe $(a, t) \in A \times \text{Ker } f$ tel que $x = a + t$.

Alors $f(x) = f(a) + f(t) = f(a)$; donc $f(x) \in f(A)$ et puisque $f(A) = f(B)$, on a $f(x) \in f(B)$. Exprimons que $f(x) \in f(B)$; il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$; on conclut que $f(x - b) = 0_E$, donc $x - b \in \text{Ker } f$. Il existe $t' \in \text{Ker } f$ tel que $x - b = t'$ ou encore $x = b + t'$, donc $x \in B + \text{Ker } f$.

Conclusion : $\forall x \in A + \text{Ker } f,\ x \in B + \text{Ker } f : A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$

Par raison de la symétrie des rôles de A et B, on aura l'inclusion en sens inverse et par conséquent

$$f(A) = f(B) \Longrightarrow A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f.$$

- Sens réciproque. Hypothèse $A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f$.

Soit $x \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$ Or $a \in A$, donc $a \in A + \text{Ker } f$ (puisque $a = a + 0_E$ avec $0_E \in \text{Ker } f$). Il en résulte que $a \in B + \text{Ker } f$ par hypothèse.

Ecrivons cela ; il existe $(b, t) \in B \times \text{Ker } f$ tel que $a = b + t$. Dans ces conditions, $f(a) = f(b) + f(t) = f(b)$, donc $x = f(a) = f(b) \in f(B)$.

$$\forall x \in f(A),\ x \in f(B) : f(A) \subset f(B).$$

Et par symétrie, on aura $f(B) = f(A)$.

$$A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f \Longrightarrow f(A) = f(B).$$

Finalement, on a montré : $A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f \Longleftrightarrow f(A) = f(B)$.