



ESPACES VECTORIELS 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ .

- 1)  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / P^{-1}MP \text{ est diagonale} \}$  est-il un espace vectoriel ?
- 2)  $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M \text{ est diagonalisable} \}$  est-il un espace vectoriel ?

## Indications - espaces vectoriels 1.

2) Réponse : non.

## Elements de correction : espaces vectoriels 1.

1) On vérifie facilement que  $F$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2) La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres distinctes.

La matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable pour les mêmes raisons.

La matrice  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ne l'est pas. En effet, elle n'admet que la valeur propre 0.

Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est visiblement pas le cas.

Donc  $G$  n'est pas un espace vectoriel.