



ESPACES VECTORIELS 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .

- 1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / P^{-1}MP \text{ est diagonale} \}$ est-il un espace vectoriel ?
- 2) $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M \text{ est diagonalisable} \}$ est-il un espace vectoriel ?

Indications - espaces vectoriels 1.

2) Réponse : non.

Elements de correction : espaces vectoriels 1.

1) On vérifie facilement que F est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car elle admet 3 valeurs propres distinctes.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable pour les mêmes raisons.

La matrice $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. En effet, elle n'admet que la valeur propre 0.

Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est visiblement pas le cas.

Donc G n'est pas un espace vectoriel.