ENDOMORPHISMES 8 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2, tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P soit un polynôme annulateur de f.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$. En déduire $E = \operatorname{Ker} f \bigoplus \operatorname{Im} f$.

 Jean MALLET

Indications - endomorphismes 8.

On montrera $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$, puis que les deux sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe.

Eléments de correction : endomorphismes 8.

Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Les hypothèses donnent $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, donc $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$

On rappelle que pour tout endomorphisme g de E, on a $\text{Ker } g \subset \text{Ker } g^2$.

Il s'agit donc de démontrer que : $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$.

P est un polynôme annulateur de f donc $P(f) = 0$, ce qui donne $a_1 f = -\sum_{k=2}^{n} a_k f^k$.

Soit $x \in \text{Ker } f^2$, alors $\forall k \geq 2,\ f^k(x) = 0$, donc on obtient $a_1 f(x) = 0$ et puisque $a_1 \neq 0$, il vient $f(x) = 0$.

$$\forall x \in \text{Ker } f^2, x \in \text{Ker } f : \text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f, \text{ donc } \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

Puisque $\dim E$ est finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

Les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires si et seulement s'ils sont en somme directe.

Soit $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$; $f(x) = 0$ et il existe $t \in E \ / \ x = f(t)$. On obtient $f(x) = f^2(t) = 0$, donc $t \in \text{Ker } f^2$ et il en résulte que $t \in \text{Ker } f : x = f(t) = 0$ et on a bien $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Conclusion : $E = \text{Ker } f \bigoplus \text{Im } f$**.**