ENDOMORPHISMES 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ne sont pas supplémentaires.

Que peut-on dire de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?

Jean MALLET

Indications - Endomorphismes.2

Discuter suivant la dimension de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
On montrera que $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = 1$.
Puis on discutera suivant la dimension de $\operatorname{Im} f$ (ou de $\operatorname{Ker} f$)
La réponse est : dans tous les cas l'un est inclus dans l'autre.

- D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = 3$. Donc dire que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires équivaut à dire : $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 0$.

Il en résulte que :

$\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ non supplémentaires équivaut à $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) \in \{1, 2, 3\}$

- **Eliminons tout de suite le cas :** $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 3$**.**

En effet, dans ce cas, on aurait $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = \dim E$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset E$, donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = E$; ce qui serait équivalent à $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f = E$: en effet, on a toujours $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \subset E$; il en résulte que l'égalité $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = E$, qui équivaut à $E \subset \mathrm{Im}\, f$ et $E \subset \mathrm{Ker}\, f$, donne $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f = E$.

Cette dernière égalité entrainerait, d'après le théorème du rang, $2 \dim E = \dim E$, ce qui est manifestement impossible.

- **Eliminons le cas où** $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 2$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ implique $\dim \mathrm{Im}\, f \geq 2$; de même l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ implique $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 2$.

On aurait donc $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f \geq 4$, ce qui est impossible d'après le théorème du rang.

- **Il ne reste plus que le cas où** $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 1$.

Les inclusions $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ imposent $\dim \mathrm{Im}\, f \geq 1$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 1$.

⋄ Si $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$.

$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 1$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$ impliquent $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f$.

Cette dernière égalité équivaut à $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Traduisons cette dernière inclusion (bien que ce ne soit pas indispensable) :

$\forall x \in E,\ f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0$: $f^2 = f_0$ (endomorphisme nul).

⋄ Si $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$

$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 1$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ impliquent $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$. De là on conclut : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f$.

⋄ Si $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$.

Alors f est surjectif, donc bijectif et $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Il en résulte que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ ce qui est impossible puisque nous sommes dans le cas où $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 1$.

En résumé : $\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f) = 1 \Longrightarrow (\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$ ou $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Im}\, f)$

Finalement : il y a une seule possibilité : $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 1$ **; ce qui donne : entre** $\mathrm{Ker}\, f$ **et** $\mathrm{Im}\, f$ **il y a toujours une inclusion**