ENDOMORPHISMES 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $(n \geq 2)$. On suppose que $f \circ f \neq f_0$ (endomorphisme nul) et $\mathrm{rang}(f) = 1$.
Montrer que f est diagonalisable.

Indications - Endomorphismes1

Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Eléments de correction : Endomorphismes.1

Notons $E = \mathbb{R}^n$.

Le rang de f vaut 1 veut dire que $\dim \operatorname{Im} f = 1$; il existe donc un vecteur $e_1 \in E$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1)$.

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Or $\operatorname{Ker} f = E(0, f)$, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $(n - 1 \geq 1)$.

Notons $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

Montrons que $f(e_1) \neq 0$.

En effet, pour tout $z \in E,\ f(z) \in \operatorname{Im} f$, donc $\forall z \in E,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ /\ f(z) = \alpha e_1$.

Il s'ensuit que $\quad \forall z \in E,\ f^2(z) = \alpha f(e_1)$.

Si $f(e_1) = 0$, alors $\forall z \in E,\ f(z) = 0$: cela voudrait dire que $f^2 = f_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $f(e_1) \neq 0$.

Montrons que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe.

Soit donc $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda e_1$ et $f(x) = 0$; donc $f(\lambda e_1) = \lambda f(e_1) = 0$.

On sait que $f(e_1) \neq 0$. Il en résulte que l'égalité $\lambda f(e_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ et par conséquent $x = 0$.

On a montré que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Si on ajoute à cette propriété que $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n = \dim E$, on obtient que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

Conséquence : la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

Dans cette base, la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de f est diagonale : l'endomorphisme f est diagonalisable