DIAGONALISATION 4 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–4

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ P^{-1}MP$ est diagonale $\}$ est-il un espace vectoriel ?

2) $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M$ est diagonalisable $\}$ est-il un espace vectoriel ?

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Diagonalisation 4.

1) oui.

2) non $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Diagonalisation 4.

1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ P^{-1}MP$ est diagonale $\}$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

F n'est pas vide : il contient la matrice nulle et la matrice unité.

Si M et N sont deux matrices de F et λ un réel,

$P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP$ qui est diagonale car on sait que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

c'est donc un espace vectoriel

2) Prenons $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice M est diagonalisable car elle est d'ordre 2, triangulaire, et admet deux valeurs propres distinctes qui sont ses termes diagonaux 0 et 1.

Soit $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour les mêmes raisons, M' est diagonalisable.

$A = M + M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut constater que A n'admet qu'une valeur propre 0, puisqu'elle est triangulaire et n'admet que des zéros sur sa diagonale.

On peut constater aussi que $A^2 = (0)$. Donc un polynôme annulateur de A est X^2. La seule valeur propre possible de A est 0 (en fait 0 est effectivement une valeur propre de A car A n'est pas inversible : une colonne nulle).

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est manifestement pas le cas.

Donc G n'est pas stable pour l'addition : ce n'est pas un espace vectoriel.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021