



DIAGONALISATION 4 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-4

Soient  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- 1)  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / P^{-1}MP \text{ est diagonale} \}$  est-il un espace vectoriel ?
- 2)  $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M \text{ est diagonalisable} \}$  est-il un espace vectoriel ?

#### Indications - Diagonalisation 4.

1) oui.

2) non  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

#### Eléments de correction : Diagonalisation 4.

1)  $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / P^{-1}MP \text{ est diagonale} \}$  est inclus dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$F$  n'est pas vide : il contient la matrice nulle et la matrice unité.

Si  $M$  et  $N$  sont deux matrices de  $F$  et  $\lambda$  un réel,

$P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP$  qui est diagonale car on sait que l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**On a montré que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  
c'est donc un espace vectoriel**

2) Prenons  $n = 2$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $M$  est diagonalisable car elle est d'ordre 2, triangulaire, et admet deux valeurs propres distinctes qui sont ses termes diagonaux 0 et 1.

Soit  $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Pour les mêmes raisons,  $M'$  est diagonalisable.

$$A = M + M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut constater que  $A$  n'admet qu'une valeur propre 0, puisqu'elle est triangulaire et n'admet que des zéros sur sa diagonale.

On peut constater aussi que  $A^2 = (0)$ . Donc un polynôme annulateur de  $A$  est  $X^2$ . La seule valeur propre possible de  $A$  est 0 (en fait 0 est effectivement une valeur propre de  $A$  car  $A$  n'est pas inversible : une colonne nulle).

Si  $A$  était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est manifestement pas le cas.

**Donc  $G$  n'est pas stable pour l'addition : ce n'est pas un espace vectoriel.**