DIAGONALISATION 3 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A + A^3 = (0)$.

Montrer que la matrice A est nulle ou semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jean MALLET

Indications - Diagonalisation 3.

- 0 est la seule valeur propre possible.
- Si 0 est la seule valeur propre, A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (penser au noyau) et $b = 0$: conclure.
- Si $\operatorname{spect}(A) = \emptyset$, considérer la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$; montrer que $(e_1, f(e_1))$ (où f est canoniquement associé à A) est une base de $\mathbb{R}^2$, puis que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$: conclure.

Eléments de correction : diagonalisation 3.

• Le polynôme $X+X^3$ est annulateur de A, donc la seule valeur propre réelle possible est 0. Donc spect $A \subset \{0\}$.

Premier cas : 0 est la seule valeur propre de A.

Plaçons nous dans $E=\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1,e_2) et associons canoniquement à A l'endomorphisme f.

Il existe un vecteur $u \neq 0_E$ dans Ker f. Complétons par un vecteur $v \in E$ tel que (u,v) soit une base de E. Dans cette base la matrice B de f est $B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Mais $b=0$ puisque A, donc f, n'admet que 0 comme valeur propre.

$B^2=(0)$, donc $B^3=(0)$; la relation $A+A^3=(0)$ équivaut à $B+B^3=(0)$, donc $B=(0)$, d'où $A=(0)$.

Si A admet 0 comme seule valeur propre, alors $A=(0)$.

Deuxième cas : A n'admet aucune valeur propre réelle :

$(e_1,f(e_1))$ est une famille libre : en effet, dans le cas contraire , **puisque** $e_1 \neq 0_E$, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ / $f(e_1)=\lambda e_1$. Cette égalité indiquerait que e_1 est un vecteur propre associé à λ et cela est contradictoire.

Dans la base $(e_1,f(e_1))$, la matrice B de f est $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Le calcul donne

$B+B^3=\begin{pmatrix} ab & a+a^2+ab^2 \\ 1+a+b^2 & b+2ab+b^3 \end{pmatrix}$.

L'égalité $B+B^3=(0)$ implique $ab=0$ et $1+a+b^2=0$. Si $a=0$, on obtient $1+b^2=0$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$: donc $b=0$ et $a=-1$. On vérifie que les deux autres égalités sont satisfaites.

Si A n'admet pas de valeurs propres réelles, alors A est semblable à $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.