DIAGONALISATION 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $n_k = \dim E(\lambda_k, A)$ la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur λ_k

$$\text{Montrer que } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k \lambda_k^2$$

Indications - diagonalisation 2.

On pourra penser à l'invariance de la trace.

Eléments de correction : diagonalisation 2.

Rappelons que la trace de matrices semblables est la même. Pour les étudiants qui ne connaîtraient pas ce résultat, montrons le.

•

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Commençons par montrer que $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

Rappelons que la trace d'une matrice est la somme de ses termes diagonaux.

Soit $C = AB$; le terme général de C est $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$

Soit $D = BA$; son terme général est $d_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}$

$$\begin{aligned}
\text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \\
\text{trace}(BA) &= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \qquad \text{on intervertit les sommations} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}b_{i,k}
\end{aligned}$$

Les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}b_{i,k}$ sont égales ; il suffit, dans la première par exemple, d'intervertir les lettres k et i (qui sont des indices muets).

• Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe un matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned}
\text{trace}(B) &= \text{trace}(P^{-1}AP) = \text{trace}((P^{-1}A)P) \\
&= \text{trace}(P(P^{-1}A)) = \text{trace}((PP^{-1})A) \\
&= \text{trace}(I_nA) = \text{trace}(A)
\end{aligned}$$

On a montré (A et B semblables)$\Longrightarrow \text{trace}(A) = \text{trace}(B)$

Remarque : cette propriété s'appelle l'invariance de la trace d'une matrice.

•

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. La matrice A est semblable à la matrice diagonale suivante : $\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Cela veut dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ (pour les étudiants de la voie scientifique, on peut prendre pour P une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1} = {}^tP$, mais cela ne change en rien la démonstration).

$$\begin{aligned}
A^2 &= (P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1})^2 \\
&= P\,\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\underbrace{P^{-1}P}_{=I_n}\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1} \\
&= P(\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^2P^{-1} \\
&= P\,\text{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)P^{-1}
\end{aligned}$$

Ceci démontre que A semblable à $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Longrightarrow A^2$ semblable à $\operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$.
On en conclut que $\operatorname{trace} A^2 = \operatorname{trace} \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$

$*$ Calcul de trace A^2.

$A^2 = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace} A^2 &= \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{i,k} \qquad \text{car } A \text{ est symétrique : } a_{k,i} = a_{i,k}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{trace} A^2 = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} a_{i,k}^2.$$

$*$ Calcul de trace $\operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$.

C'est la somme des termes diagonaux : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$. On regroupe les termes λ_1^2 autant de fois qu'on les trouve, c'est-à-dire n_1 fois où n_1 est la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1. Et l'on fait de même pour les autres valeurs propres distinctes.
Cela veut dire concrètement que si

$$\operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{\text{n}_r \text{ fois}}) \text{ alors}$$

$$\operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \operatorname{Diag}(\underbrace{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^2}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^2, \ldots, \lambda_2^2}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^2 \ldots \lambda_r^2}_{\text{n}_r \text{ fois}})$$

Il en résulte que $\operatorname{trace} \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i\lambda_i^2$

$$\textbf{Et par l'invariance de la trace : } \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} a_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i\lambda_i^2.$$