DIAGONALISATION 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $n_k = \dim E(\lambda_k, A)$ la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur λ_k

$$\text{Montrer que } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k \lambda_k^2$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - diagonalisation 2.

On pourra penser à l'invariance de la trace.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : diagonalisation 2.

Rappelons que la trace de matrices semblables est la même. Pour les étudiants qui ne connaîtraient pas ce résultat, montrons le.

•

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Commençons par montrer que $\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$

Rappelons que la trace d'une matrice est la somme de ses termes diagonaux.

Soit $C=AB$; le terme général de C est $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$

Soit $D=BA$; son terme général est $d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$

$$\begin{aligned}
\text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}c_{i,i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\\
\text{trace}(BA) &= \sum_{i=1}^{n}d_{i,i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,i} \qquad \text{on intervertit les sommations}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{i,k}a_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{k,i}b_{i,k}
\end{aligned}$$

Les deux sommes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}$ et $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{k,i}b_{i,k}$ sont égales ; il suffit, dans la première par exemple, d'intervertir les lettres k et i (qui sont des indices muets).

• Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe un matrice inversible $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$

$$\begin{aligned}
\text{trace}(B) &= \text{trace}(P^{-1}AP)=\text{trace}((P^{-1}A)P)\\
&= \text{trace}(P(P^{-1}A))=\text{trace}((PP^{-1})A)\\
&= \text{trace}(I_nA)=\text{trace}(A)
\end{aligned}$$

On a montré (A et B semblables)$\Longrightarrow\text{trace}(A)=\text{trace}(B)$

Remarque : cette propriété s'appelle l'invariance de la trace d'une matrice.

•

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. La matrice A est semblable à la matrice diagonale suivante : $\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Cela veut dire qu'il existe une matrice $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A=P\,\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1}$ (pour les étudiants de la voie scientifique, on peut prendre pour P une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1}={}^tP$, mais cela ne change en rien la démonstration).

$$\begin{aligned}
A^2 &= (P\,\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1})^2\\
&= P\,\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\underbrace{P^{-1}P}_{=I_n}\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1}\\
&= P(\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))^2P^{-1}\\
&= P\,\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)P^{-1}
\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ceci démontre que A semblable à $\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \Longrightarrow A^2$ semblable à $\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$.
On en conclut que trace A^2 = trace $\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$

$*$ Calcul de trace A^2.

$A^2 = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j}$.

$$\begin{aligned}\text{trace } A^2 &= \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{i,k} \qquad \text{car } A \text{ est symétrique : } a_{k,i} = a_{i,k}\end{aligned}$$

$$\text{trace } A^2 = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} a_{i,k}^2.$$

$*$ Calcul de trace $\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)$.

C'est la somme des termes diagonaux : $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$. On regroupe les termes λ_1^2 autant de fois qu'on les trouve, c'est-à-dire n_1 fois où n_1 est la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1. Et l'on fait de même pour les autres valeurs propres distinctes.
Cela veut dire concrètement que si

$$\text{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{\text{n}_1\text{ fois}},\underbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_2}_{\text{n}_2\text{ fois}},\dots,\underbrace{\lambda_r\dots\lambda_r}_{\text{n}_r\text{ fois}}) \text{ alors}$$

$$\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^2,\dots,\lambda_1^2}_{\text{n}_1\text{ fois}},\underbrace{\lambda_2^2,\dots,\lambda_2^2}_{\text{n}_2\text{ fois}},\dots,\underbrace{\lambda_r^2\dots\lambda_r^2}_{\text{n}_r\text{ fois}})$$

Il en résulte que trace $\text{Diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2) = \sum_{i=1}^{r} n_i\lambda_i^2$

$$\textbf{Et par l'invariance de la trace :}\quad \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} a_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i\lambda_i^2.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021