DIAGONALISATION 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.
Montrer que $(\exists\, k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = I_n) \Longrightarrow (A^2 = I_n)$.
2) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.
Montre que $(A^3 = B^3) \Longrightarrow (A = B)$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Diagonalisation.1

2) Considérer les endomorphismes f et g canoniquement associés à A et B. Montrer qu'ils ont les mêmes valeurs propres, les mêmes sous-espaces propres puis que les restrictions de f et g à chaque sous-espace propre sont égales.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Diagonalisaton.1

1) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, il existe une matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ D^p = P^{-1}A^pP$ (résultat classique).

Donc $A^k = I_n \Longrightarrow D^k = I_n$. Cela veut dire que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i^k = 1$, ou encore $\lambda_i = \pm 1$ ou finalement $\lambda_i^2 = 1$. Cela donne $D^2 = I_n$.

Dans ces conditions, $A^2 = PD^2P^{-1} = I_n$**.**

2) Considérons l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de E canoniquement associé à B.

$A^3 = B^3 \Longleftrightarrow f^3 = g^3$.

Soit $\text{spect}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

Alors puisque f est diagonalisable, $\text{spect}\,(f^3) = \{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_r^3\}$.

En effet, si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de f (donc de A), alors A est semblable à

$$\text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{\text{n}_r \text{ fois}}) \text{ et par suite } A^3 \text{ est semblable à}$$

$$\text{Diag}(\lambda_1^3, \ldots, \lambda_n^3) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^3}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^3}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^3 \ldots \lambda_r^3}_{\text{n}_r \text{ fois}}).$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Comme $f^3 = g^3$, on en déduit que $\text{spect}\,(g^3) = \{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_r^3\}$, et le même raisonnement fait pour f prouvera que $\text{spect}\,(g) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$,

$$\text{spect}\,(f) = \text{spect}\,(g) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$$

Le raisonnement précédent prouve, au regard des matrices

$$\text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{\text{n}_r \text{ fois}}) \text{ et } \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^3}_{\text{n}_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^3}_{\text{n}_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^3 \ldots \lambda_r^3}_{\text{n}_r \text{ fois}})$$

que $\text{Ker}\,(f - \lambda_i\,\text{Id}_E) = \text{Ker}\,(f^3 - \lambda_i^3\,\text{Id}_E)$, car f et f^3 sont diagonalisables dans la même base.

De même pour g ; donc puisque $g^3 = f^3$, on en déduit $\text{Ker}\,(f - \lambda_i\,\text{Id}_E) = \text{Ker}\,(g - \lambda_i\,\text{Id}_E)$. Il en résulte que $\forall x \in \text{Ker}\,(f - \lambda_i\,\text{Id}_E),\ f(x) = \lambda_i x = g(x)$.

f étant diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \text{Ker}\,(f - \lambda_i\,\text{Id}_E)$.

$$\forall u \in E,\ u = \sum_{i=1}^{r} u_i \text{ où } u_i \in \text{Ker}\,(f - \lambda_i\,\text{Id}_E), \text{ donc } f(u) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = g(u) \ : \ f = g.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021