



DIAGONALISATION 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.

Montrer que $(\exists k \in \mathbb{N}^* / A^k = I_n) \implies (A^2 = I_n)$.

2) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.

Montre que $(A^3 = B^3) \implies (A = B)$.

Indications - Diagonalisation.1

2) Considérer les endomorphismes f et g canoniquement associés à A et B . Montrer qu'ils ont les mêmes valeurs propres, les mêmes sous-espaces propres puis que les restrictions de f et g à chaque sous-espace propre sont égales.

Éléments de correction : Diagonalisation.1

1) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, il existe une matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $D^p = P^{-1}A^pP$ (résultat classique).

Donc $A^k = I_n \implies D^k = I_n$. Cela veut dire que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i^k = 1$, ou encore $\lambda_i = \pm 1$ ou finalement $\lambda_i^2 = 1$. Cela donne $D^2 = I_n$.

Dans ces conditions, $A^2 = PD^2P^{-1} = I_n$.

2) Considérons l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de E canoniquement associé à B .

$$A^3 = B^3 \iff f^3 = g^3.$$

Soit $\text{spect}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Alors puisque f est diagonalisable, $\text{spect}(f^3) = \{\lambda_1^3, \dots, \lambda_r^3\}$.

En effet, si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de f (donc de A), alors A est semblable à

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r \text{ fois}})$$

$$\text{Diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \dots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \dots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r^3, \dots, \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}}).$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Comme $f^3 = g^3$, on en déduit que $\text{spect}(g^3) = \{\lambda_1^3, \dots, \lambda_r^3\}$, et le même raisonnement fait pour f prouvera que $\text{spect}(g) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$,

$$\text{spect}(f) = \text{spect}(g) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

Le raisonnement précédent prouve, au regard des matrices

$$\text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r \text{ fois}}) \text{ et } \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \dots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \dots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r^3, \dots, \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}})$$

que $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Ker}(f^3 - \lambda_i^3 \text{Id}_E)$, car f et f^3 sont diagonalisables dans la même base.

De même pour g ; donc puisque $g^3 = f^3$, on en déduit $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Ker}(g - \lambda_i \text{Id}_E)$. Il en résulte que $\forall x \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$, $f(x) = \lambda_i x = g(x)$.

f étant diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$.

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=1}^r u_i \text{ où } u_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E), \text{ donc } f(u) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i = g(u) : f = g.$$