ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–34

On considère la suite de polynômes :

$P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (nx+1)P_{n-1}(x) + x(1-x)P'_{n-1}(x)$.

1) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient du terme de plus haut degré.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n$ a toutes ses racines réelles (aucune complexe).

Montrer que toutes ces racines sont simples (non multiples) et strictement négatives.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1)

$P_1(x) = (x+1)P_0(x) = x+1.$

$P_2(x) = (2x+1)P_1(x) + x(1-x)P_1'(x) = (2x+1)(x+1) + x - x^2 = x^2 + 4x + 1.$

Faisons un raisonnement par récurrence.

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{H}_n$ la propriété : $\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n + Q_n(x)$.

- Cette propriété est satisfaite pour $n = 1, 2$.
- Supposons que pour un entier $n \geq 1$ donné

$\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n + Q_n(x)$.

$P_{n+1}(x) = ((n+1)x+1)P_n(x) + (x-x^2)P_n'(x)$.

Dans P_{n+1} il n'y a visiblement pas de terme de degré strictement supérieur à $n+1$ car $x \longmapsto ((n+1)x+1)P_n(x)$ est de degré $n+1$ ainsi que $x \longmapsto (x-x^2)P_n'(x)$.

Cherchons le terme de degré $n+1$.

$$\begin{aligned}((n+1)x+1)P_n(x) &= (n+1)xP_n(x) + P_n(x)\\ &= (n+1)x(x^n + Q_n(x)) + P_n(x) \quad \text{grâce à l'hypothèse de récurrence}\\ &= (n+1)x^{n+1} + \underbrace{(n+1)xQ_n(x) + P_n(x)}_{\deg \leq n}\end{aligned}.$$

$P_n'(x) = nx^{n-1} + Q_n'(x)$ avec $\deg Q_n'(x) \leq n-1$

$$\begin{aligned}(x-x^2)P_n'(x) &= (x-x^2)(nx^{n-1} + Q_n'(x))\\ &= -nx^{n+1} + \underbrace{(x-x^2)Q_n'(x) + nx^n}_{\deg \leq n}\end{aligned}$$

Donc le terme de degré $n+1$ de $P_{n+1}(x)$ est $(n+1)x^{n+1} - nx^{n+1} = x^{n+1}$.

On peut donc affirmer,

$\exists\, Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$. C'est la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$

La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

On remarque qu'elle esr vraie aussi pour $n = 0$ car $P_0(x) = 1 = x^0 + Q_0(x)$ où Q_0 est le polynome nul dont par convention le degré vaut $-\infty$.

2)

Nous allons montrer, en même temps, que P_n (pour $n \geq 1$) a toutes ses racines réelles, distinctes et négatives ; et nous allons faire celà, bien sûr, par récurrence.

Pour cela, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

Pour $n \geq 1$, P_n a n racines réelles, distinctes et négatives.

- Initialisation : $P_1(x) = x+1$. Donc P_1 a une racine réelle négative, $x = -1$.

Comme on parle de racines distinctes, regardons le cas $n = 2$.

$P_2(x) = x^2+4x+1 = (x+2)^2 - 3$. Ses racines sont donc $x = -2+\sqrt{3} < 0$ et $x = -2-\sqrt{3} < 0$.

Supposons que pour un entier $n \geq 2$ on ait la propriété : P_n a n racines réelles, distinctes et négatives et notons $x_1, \ldots, x_n$ ces racines rangées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire : $x_1 < \cdots < x_n < 0$.

- La racine x_i est simple, donc $P_n'(x_i) \neq 0$.

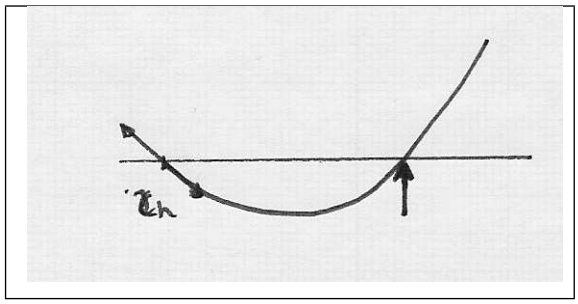
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

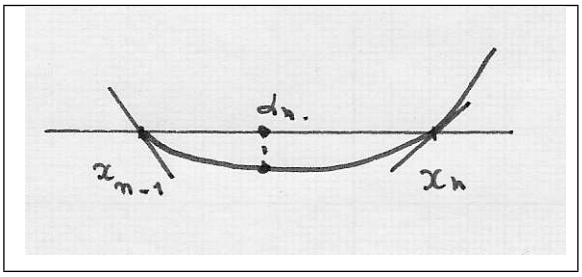
- Regardons le signe de $P'_n(x_i)$.

∗ $P_n(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$; on conclut que $P'_n(x_n) > 0$, sinon au voisinage de x_n, sur un intervalle de la forme $]x_n, x_n + \alpha[$, $P_n(x)$ serait strictement négatif, donc P_n s'annulerait après x_n et cela est impossible puisque x_n est la dernière racine de P_n.

On aurait, au mieux, cette situation :

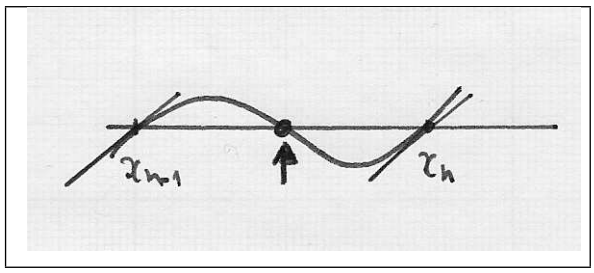


Donc $P'_n(x_n) > 0$ et on a cette situation :



∗ $P'_n(x_{n-1}) < 0$. Sinon sur l'intervalle $]x_{n-1}, x_n[$ P_n prendrait des valeurs de signes contraires, donc s'annulerait, ce qui donnerait une racine suplémentaire.

On aurait, au mieux, cette situation :



- On voit alors facilement que :

Si n est pair, $P'_n(x_{2k}) > 0$ et $P'_n(x_{2k+1}) < 0$

Donc $P'_n(x_1) < 0$

Si n est impair, $P'_n(x_{2k}) < 0$ et $P'_n(x_{2k+1}) > 0$

Donc $P'_n(x_1) > 0$.

- **Occupons-nous des racines de P_{n+1}.**

▷ Remarquons que pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, $P_{n+1}(x_i) = x_i(1 - x_i)P'_n(x_i)$; donc pour tout indice $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$P_{n+1}(x_{i+1}) \times P_{n+1}(x_i) = x_{i+1}(1 - x_{i+1})P'_n(x_{i+1}) \times x_i(1 - x_i)P'_n(x_i) < 0$, puisque $x_i(1 - x_i) < 0$, ainsi que $x_{i+1}(1 - x_{i+1})$ ainsi que $P'_n(x_{i+1}) \times P'_n(x_i)$ (d'après ce qui précède).

La fonction P_{n+1} est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et change de signe, donc elle s'annule au moins une fois en vertu du théorème des valeurs intermédiaires : **cela fait déjà, pour P_{n+1}, $n-1$ racines réelles négatives.**

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

▷ $P_{n+1}(x_n) < 0$ car $P_{n+1}(x_n) = x_n(1-x_n)P'_n(x_n)$ avec $x_n(1-x_n) < 0$ et $P'_n(x_n) > 0$ comme nous venons de le voir. Remarquons que $P_{n+1}(0) = P_n(0)$ d'après la relation liant P_{n+1} et P_n. Donc $P_{n+1}(0) = P_1(0) = 1$.

Sur l'intervalle $]x_n, 0[$, P_{n+1} change de signe, donc s'annule. **Cela fait une n ème racine, négative et distincte des précédentes.**

▷ Recherche de la dernière.

Pour les mêmes raisons que précédemment, $P_{n+1}(x_1)$ est du signe contraire de celui de $P'_n(x_1)$.

∗ **Si n est pair.** On sait qu'alors $P'_n(x_1) < 0$, donc $P_{n+1}(x_1) > 0$. De plus $P_{n+1}(x) \underset{(x\to-\infty)}{\sim} x^{n+1}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{n+1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n+1} = -\infty$ (car $n+1$ est impair)

Donc sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$, le polynôme P_{n+1} change de signe donc s'annule en une valeur strictement inférieure à x_1

∗ **Si n est impair.** On sait qu'alors $P'_n(x_1) > 0$, donc $P_{n+1}(x_1) < 0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{n+1}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{n+1} = +\infty$ (car $n+1$ est pair)

Donc sur l'intervalle $]-\infty, x1[$, le polynôme P_{n+1} change de signe donc s'annule en une valeur stricteemnt inférieure à x_1

Sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$, le polynôme P_{n+1} s'annule.

P_{n+1} admet donc $n+1$ racines réelles, distinctes, négatives.

La propriété est donc héréditaire et on peut affirmer :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, **$P_n$ admet n racines réelles, distinctes, négatives**

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021