ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–34

On considère la suite de polynômes :

$P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (nx+1)P_{n-1}(x) + x(1-x)P'_{n-1}(x)$.

1) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient du terme de plus haut degré.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n$ a toutes ses racines réelles (aucune complexe).

Montrer que toutes ces racines sont simples (non multiples) et strictement négatives.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1)

$P_1(x) = (x+1)P_0(x) = x+1$.

$P_2(x) = (2x+1)P_1(x) + x(1-x)P_1'(x) = (2x+1)(x+1) + x - x^2 = x^2 + 4x + 1$.

Faisons un raisonnement par récurrence.

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{H}_n$ la propriété : $\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n + Q_n(x)$.

- Cette propriété est satisfaite pour $n = 1, 2$.
- Supposons que pour un entier $n \geq 1$ donné

$\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n + Q_n(x)$.

$P_{n+1}(x) = ((n+1)x+1)P_n(x) + (x - x^2)P_n'(x)$.

Dans P_{n+1} il n'y a visiblement pas de terme de degré strictement supérieur à $n+1$ car $x \longmapsto ((n+1)x+1)P_n(x)$ est de degré $n+1$ ainsi que $x \longmapsto (x-x^2)P_n'(x)$.

Cherchons le terme de degré $n+1$.

$$\begin{aligned}((n+1)x+1)P_n(x) &= (n+1)xP_n(x) + P_n(x) \\ &= (n+1)x(x^n + Q_n(x)) + P_n(x) \quad \text{grâce à l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)x^{n+1} + \underbrace{(n+1)xQ_n(x) + P_n(x)}_{\deg \leq n}\end{aligned}.$$

$P_n'(x) = nx^{n-1} + Q_n'(x)$ avec $\deg Q_n'(x) \leq n-1$

$$\begin{aligned}(x-x^2)P_n'(x) &= (x-x^2)(nx^{n-1} + Q_n'(x)) \\ &= -nx^{n+1} + \underbrace{(x-x^2)Q_n'(x) + nx^n}_{\deg \leq n}\end{aligned}$$

Donc le terme de degré $n+1$ de $P_{n+1}(x)$ est $(n+1)x^{n+1} - nx^{n+1} = x^{n+1}$.

On peut donc affirmer,

$\exists\, Q_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$. C'est la propriété $\mathcal{H}_{n+1}$

La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

On remarque qu'elle esr vraie aussi pour $n = 0$ car $P_0(x) = 1 = x^0 + Q_0(x)$ où Q_0 est le polynome nul dont par convention le degré vaut $-\infty$.

2)

Nous allons montrer, en même temps, que P_n (pour $n \geq 1$) a toutes ses racines réelles, distinctes et négatives ; et nous allons faire celà, bien sûr, par récurrence.

Pour cela, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

Pour $n \geq 1$, P_n a n racines réelles, distinctes et négatives.

- Initialisation : $P_1(x) = x+1$. Donc P_1 a une racine réelle négative, $x = -1$.

Comme on parle de racines distinctes, regardons le cas $n = 2$.

$P_2(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$. Ses racines sont donc $x = -2 + \sqrt{3} < 0$ et $x = -2 - \sqrt{3} < 0$.

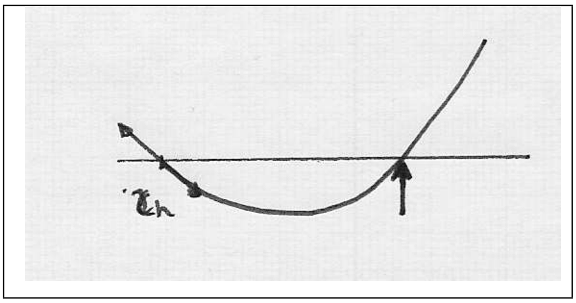
Supposons que pour un entier $n \geq 2$ on ait la propriété : P_n a n racines réelles, distinctes et négatives et notons $x_1, \ldots, x_n$ ces racines rangées dans l'ordre croissant, c'est-à-dire : $x_1 < \cdots < x_n < 0$.

- La racine x_i est simple, donc $P_n'(x_i) \neq 0$.

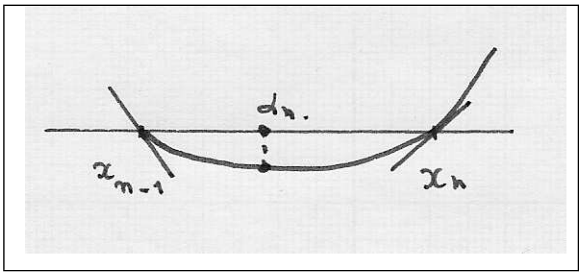
- Regardons le signe de $P_n'(x_i)$.

$*$ $P_n(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$; on conclut que $P_n'(x_n) > 0$, sinon au voisinage de x_n, sur un intervalle de la forme $]x_n, x_n + \alpha[$, $P_n(x)$ serait strictement négatif, donc P_n s'annulerait après x_n et cela est impossible puisque x_n est la dernière racine de P_n.

On aurait, au mieux, cette situation :

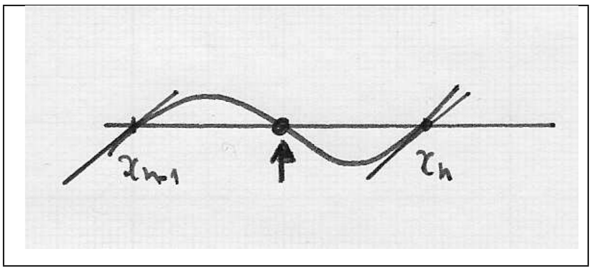


Donc $P_n'(x_n) > 0$ et on a cette situation :



$*$ $P_n'(x_{n-1}) < 0$. Sinon sur l'intervalle $]x_{n-1}, x_n[$ P_n prendrait des valeurs de signes contraires, donc s'annulerait, ce qui donnerait une racine suplémentaire.

On aurait, au mieux, cette situation :



- On voit alors facilement que :

Si n est pair, $P_n'(x_{2k}) > 0$ et $P_n'(x_{2k+1}) < 0$

Donc $P_n'(x_1) < 0$

Si n est impair, $P_n'(x_{2k}) < 0$ et $P_n'(x_{2k+1}) > 0$

Donc $P_n'(x_1) > 0$.

- **Occupons-nous des racines de P_{n+1}.**

$\triangleright$ Remarquons que pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, $P_{n+1}(x_i) = x_i(1 - x_i)P_n'(x_i)$; donc pour tout indice $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$P_{n+1}(x_{i+1}) \times P_{n+1}(x_i) = x_{i+1}(1 - x_{i+1})P_n'(x_{i+1}) \times x_i(1 - x_i)P_n'(x_i) < 0$, puisque $x_i(1 - x_i) < 0$, ainsi que $x_{i+1}(1 - x_{i+1})$ ainsi que $P_n'(x_{i+1}) \times P_n'(x_i)$ (d'après ce qui précède).

La fonction P_{n+1} est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et change de signe, donc elle s'annule au moins une fois en vertu du théorème des valeurs intermédiaires : **cela fait déjà, pour P_{n+1}, $n - 1$ racines réelles négatives.**

▹ $P_{n+1}(x_n) < 0$ car $P_{n+1}(x_n) = x_n(1-x_n)P'_n(x_n)$ avec $x_n(1-x_n) < 0$ et $P'_n(x_n) > 0$ comme nous venons de le voir. Remarquons que $P_{n+1}(0) = P_n(0)$ d'après la relation liant P_{n+1} et P_n. Donc $P_{n+1}(0) = P_1(0) = 1$.

Sur l'intervalle $]x_n, 0[$, P_{n+1} change de signe, donc s'annule. **Cela fait une n ème racine, négative et distincte des précédentes.**

▹ Recherche de la dernière.

Pour les mêmes raisons que précédemment, $P_{n+1}(x_1)$ est du signe contraire de celui de $P'_n(x_1)$.

∗ **Si n est pair.** On sait qu'alors $P'_n(x_1) < 0$, donc $P_{n+1}(x_1) > 0$. De plus $P_{n+1}(x) \underset{(x \to -\infty)}{\sim} x^{n+1}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^{n+1} = -\infty$ (car $n+1$ est impair)

Donc sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$, le polynôme P_{n+1} change de signe donc s'annule en une valeur strictement inférieure à x_1

∗ **Si n est impair.** On sait qu'alors $P'_n(x_1) > 0$, donc $P_{n+1}(x_1) < 0$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^{n+1} = +\infty$ (car $n+1$ est pair)

Donc sur l'intervalle $]-\infty, x1[$, le polynôme P_{n+1} change de signe donc s'annule en une valeur stricteemnt inférieure à x_1

Sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$, le polynôme P_{n+1} s'annule.

P_{n+1} **admet donc $n+1$ racines réelles, distinctes, négatives.**

La propriété est donc héréditaire et on peut affirmer :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n **admet n racines réelles, distinctes, négatives**