ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–32

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et de période T.

1) Montrer que l'application $a \in \mathbb{R} \longmapsto I(a) = \displaystyle\int_a^{a+T}$ est constante. On notera I cette constante.

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \displaystyle\int_a^{a+x} f(t)dt \right) = \frac{I}{T}$

3) Montrer que si f admet une primitive F bornée, alors F est périodique.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Utilisons la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} I(a) - I(b) &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, posons $u = x - T$; $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(u+T)du = \int_a^b f(u)du$ puisque f a pour période T.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ I(a) = I(b) : \text{l'application } a \longmapsto I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx \text{ est constante.}}$$

Remarque : une autre démonstration.

f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives. Soit F l'une d'entre elles.

$I(a) = F(a+T) - F(a)$. L'application $a \longmapsto a+T$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $a \longmapsto F(a+T)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $f(a+T) = f(a)$ puisque f a pour période T.

Donc $\forall a \in \mathbb{R},\ I'(a) = f(a) - f(a) = 0$; cela veut dire que l'application $a \longmapsto I(a)$ est constante.

2)

Puisque x tend vers $+\infty$, on peut le supposer positif et supérieur ou égal à T.

Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ / $nT \leq x < (n+1)T$: en effet on peut définir n comme la partie entière de $\frac{x}{T}$.

Notons $J(x) = \frac{1}{x}\int_a^{a+x} f(t)dt$.

$$J(x) = \underbrace{\frac{1}{x}\int_a^{a+nT} f(t)dt}_{A} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_{a+nT}^{a+x} dt}_{B}.$$

$A = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t)dt = \frac{nI}{x}$ car les n intégrales valent I.

Or $0 < nT \leq x < (n+1)T \Longleftrightarrow \frac{n}{n+1}\frac{1}{T} < \frac{n}{x} \leq \frac{1}{T}$.

Remarquons que $x \to +\infty \Longleftrightarrow n \to +\infty$, donc par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n}{x} = \frac{1}{T}$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nI}{x} = \frac{I}{T}$.

Il s'agit maintenant de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} B = 0$.

$|B| \leq \frac{1}{x}\int_{a+nT}^{a+x} |f(t)|dt$ car les bornes sont dans l'ordre croissant. De plus $t \longmapsto |f(t)|$ est une fonction continue périodique, donc elle est bornée ; en effet l'image de $\mathbb{R}$ par cette fonction est l'image de $[0:T]$, $|f|$ est continue sur un intervalle fermé, donc bornée. Soit M un majorant de $|f|$; on a $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq M$. On intègre cette inégalité sur $[a+nT, a+x]$ et on obtient :

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$|B| \leq \frac{1}{x}\int_{a+nT}^{a+x} M dt$, donc $|B| \leq \frac{1}{x}M(x-nT) \leq \frac{M}{x}T$,

car $0 < nT \leq x < (n+1)T \Longrightarrow 0 \leq x - nT < T$.

Par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} |B| = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} B = 0$.

$$J(x) = \frac{1}{x}\int_{a}^{a+x} f(t)dt = A + B, \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} J(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{a}^{a+x} f(t)dt = \frac{I}{T}$$

3)

Remarquons que, s'il existe une primitive bornée, elles le sont toutes. On peut supposer que F est bornée.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) - F(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)dt = I.$

Or $J(x) = \frac{1}{x}(F(x+T) - F(T))$ d'après la question 1) pour $a = T$. Notons K un majorant de $|F|$ (ce majorant existe puisque F est bornée). En utilisant l'inégalité de la valeur absolue, on obtient

$|J(x)| \leq \frac{1}{x}(|F(x+T)| + |F(T)|) \leq \frac{2K}{x}$.

Par encadrement, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = 0$. Or on a vu dans la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \frac{I}{T}$, donc $I = 0$.

Si f admet une primitive F bornée, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) = F(x)$: F est périodique

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021