ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−31

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les valeurs de n pour que l'équation $(\ln x)^n = x$ admet deux racines sur $]1, +\infty[$.

On se place désormais dans cette situation

2) On pose v_n la plus grande des deux racines ; montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3) On pose u_n la plus petite des racines.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite, que l'on notera ℓ.

4) Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

1)

Puisque $x \geq 1$, l'équation $(\ln x)^n = x$ équivaut à $\dfrac{(\ln x)^n}{x} = 1$.

Etudions l'application f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x}$. La fonction f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 1,\ f_n'(x) &= \frac{x\dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x} - (\ln x)^n}{x^2} \\
&= \frac{n(\ln x)^{n-1} - (\ln x)^n}{x^2} \\
&= \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^2}(n - \ln x)
\end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$, $\dfrac{(\ln x)^{n-1}}{x^2} \geq 0$, donc le signe de $f_n'(x)$ est celui de $n - \ln x$.

$n - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq n \iff x \leq \exp(n)$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$ par croissances comparées, ce qui permet de dresser le tableau de variations de f_n.

x	1		$\exp(n)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{n^n}{\exp(n)}$	$\searrow$	0

L'équation $f_n(x) = 1$ aura des solutions si et seulement si $\dfrac{n^n}{\exp(n)} \geq 1$.

Or $\dfrac{n^n}{\exp(n)} = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Pour $n = 1$, $\frac{n}{e} = \frac{1}{e} < 1$, pour $n = 2$, $\frac{n}{e} = \frac{2}{e} < 1$, donc il n'y a pas de solution.

Pour tout entier $n \geq 3$, on a $\frac{n}{e} > 1$, donc $\left(\frac{n}{e}\right)^n > 1$.

- Sur l'intervalle $[1, \exp(n)]$, la fonction f_n est continue, strictement croissante, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0; \left(\frac{n}{e}\right)^n]$. Puisque 1 appartient à cet intervalle image, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée u_n.

Sur l'intervalle $[\exp(n), +\infty[$, la fonction f_n est continue, strictement décroissante, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]0; \left(\frac{n}{e}\right)^n]$. Donc il y a sur cet intervalle une autre solution (et une seule) notée v_n.

Il est clair que $u_n \leq v_n$ puisque l'on a $u_n \leq \exp(n) \leq v_n$. On peut même remarquer que les inégalités sont strictes.

2)

On vient de voir que $\forall n \geq 3,\ v_n \geq \exp(n)$.

$$\boxed{v_n \geq \exp(n) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

3)

Etudions la variation de la suite (u_n).

$f_{n+1}(u_n) = \dfrac{(\ln u_n)^{n+1}}{u_n} = \dfrac{(\ln u_n)^n}{u_n} \times u_n = u_n$ par définition de u_n.

Or $u_n \geq 1$, donc $f_{n+1}(u_n) \geq 1$, c'est-à-dire $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$

Sur l'intervalle $[1, \exp(n+1)]$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante, u_n et u_{n+1} sont dans cet intervalle (car $1 \leq u_n \leq \exp(n)$), donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) \Longleftrightarrow u_n \geq u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante, minorée par } 1, \text{ donc elle converge vers une réel } \ell \geq 1}$$

- Détermination de ℓ.

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 1 &\Longleftrightarrow (\ln u_n)^n = u_n \\ &\Longleftrightarrow n \ln(\ln u_n) = \ln u_n \qquad \text{par bijectivité de la fonction } \ln \\ &\Longleftrightarrow \ln(\ln u_n) = \frac{1}{n} \ln u_n \\ &\Longleftrightarrow \ln u_n = \exp(\frac{1}{n} \ln u_n) \qquad \text{par bijectivité de la fonction } \exp \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln \ell$ par continuité de la fonction $\ln$ au point $\ell > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{1}{n} \ln u_n) = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln u_n = 0$ (continuité de la fonction $\exp$ au point 0)

$$\boxed{\text{Conclusion : on a } \ln \ell = 1 \text{ ce qui équivaut à } \ell = e}$$

4)

On a $\ln u_n = \exp(\frac{1}{n} \ln u_n)$ ce qui équivaut à $u_n = \exp\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n)\Big)$

$$\begin{aligned} u_n - e &= \exp\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n)\Big) - e \\ &= e\Big(\exp\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \qquad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{1}{n} \ln u_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big) = 0$.

Il s'ensuit que $\Big(\exp\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \underset{(+\infty)}{\sim} \Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big)$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n} \ln u_n) = 0$, donc $\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big)) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n} \ln u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = 1 \neq 0$, donc $\ln u_n \underset{(+\infty)}{\sim} 1$ et finalement $\frac{1}{n} \ln u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$

En remontant les équivalences, on arrive à $\Big(\exp\Big(\exp(\frac{1}{n} \ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{(4)}, \ (u_n - e) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e}{n}.}$$