ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–31

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les valeurs de n pour que l'équation $(\ln x)^n = x$ admet deux racines sur $]1, +\infty[$.

On se place désormais dans cette situation

2) On pose v_n la plus grande des deux racines ; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3) On pose u_n la plus petite des racines.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite, que l'on notera ℓ.

4) Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 31

1)

Puisque $x \geq 1$, l'équation $(\ln x)^n = x$ équivaut à $\dfrac{(\ln x)^n}{x} = 1$.

Etudions l'application f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^n}{x}$. La fonction f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\begin{aligned}\forall x \geq 1,\ f_n'(x) &= \frac{x\dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x} - (\ln x)^n}{x^2} \\ &= \frac{n(\ln x)^{n-1} - (\ln x)^n}{x^2} \\ &= \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^2}(n - \ln x)\end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$, $\dfrac{(\ln x)^{n-1}}{x^2} \geq 0$, donc le signe de $f_n'(x)$ est celui de $n - \ln x$.

$n - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq n \iff x \leq \exp(n)$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ par croissances comparées, ce qui permet de dresser le tableau de variations de f_n.

x	1		$\exp(n)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{n^n}{\exp(n)}$	$\searrow$	0

L'équation $f_n(x) = 1$ aura des solutions si et seulement si $\dfrac{n^n}{\exp(n)} \geq 1$.

Or $\dfrac{n^n}{\exp(n)} = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Pour $n = 1$, $\dfrac{n}{e} = \dfrac{1}{e} < 1$, pour $n = 2$, $\dfrac{n}{e} = \dfrac{2}{e} < 1$, donc il n'y a pas de solution.

Pour tout entier $n \geq 3$, on a $\dfrac{n}{e} > 1$, donc $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n > 1$.

- Sur l'intervalle $[1, \exp(n)]$, la fonction f_n est continue, strictement croissante, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0; \left(\dfrac{n}{e}\right)^n]$. Puisque 1 appartient à cet intervalle image, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée u_n.
Sur l'intervalle $[\exp(n), +\infty[$, la fonction f_n est continue, strictement décroissante, elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $]0; \left(\dfrac{n}{e}\right)^n]$. Donc il y a sur cet intervalle une autre solution (et une seule) notée v_n.
Il est clair que $u_n \leq v_n$ puisque l'on a $u_n \leq \exp(n) \leq v_n$. On peut même remarquer que les inégalités sont strictes.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2)

On vient de voir que $\forall n \geq 3,\ v_n \geq \exp(n)$.

$$\boxed{v_n \geq \exp(n) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

3)

Etudions la variation de la suite (u_n).

$f_{n+1}(u_n) = \dfrac{(\ln u_n)^{n+1}}{u_n} = \dfrac{(\ln u_n)^n}{u_n} \times u_n = u_n$ par définition de u_n.

Or $u_n \geq 1$, donc $f_{n+1}(u_n) \geq 1$, c'est-à-dire $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$

Sur l'intervalle $[1, \exp(n+1)]$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante, u_n et u_{n+1} sont dans cet intervalle (car $1 \leq u_n \leq \exp(n)$), donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) \iff u_n \geq u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante, minorée par 1, donc elle converge vers une réel } \ell \geq 1}$$

- Détermination de ℓ.

$$\begin{aligned} f_n(u_n) = 1 &\iff (\ln u_n)^n = u_n \\ &\iff n\ln(\ln u_n) = \ln u_n \quad \text{par bijectivité de la fonction } \ln \\ &\iff \ln(\ln u_n) = \frac{1}{n}\ln u_n \\ &\iff \ln u_n = \exp(\tfrac{1}{n}\ln u_n) \quad \text{par bijectivité de la fonction } \exp \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln \ell$ par continuité de la fonction $\ln$ au point $\ell > 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{1}{n}\ln u_n) = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln u_n = 0$ (continuité de la fonction $\exp$ au point 0)

$$\boxed{\text{Conclusion : on a } \ln \ell = 1 \text{ ce qui équivaut à } \ell = e}$$

4)

On a $\ln u_n = \exp(\frac{1}{n}\ln u_n)$ ce qui équivaut à $u_n = \exp\Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n)\Big)$

$$\begin{aligned} u_n - e &= \exp\Big(\exp(\tfrac{1}{n}\ln u_n)\Big) - e \\ &= e\Big(\exp\Big(\exp(\tfrac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \quad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{1}{n}\ln u_n) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big) = 0$.

Il s'ensuit que $\Big(\exp\Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \underset{(+\infty)}{\sim} \Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big)$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}\ln u_n) = 0$, donc $\Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big)\Big) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}\ln u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = 1 \neq 0$, donc $\ln u_n \underset{(+\infty)}{\sim} 1$ et finalement $\frac{1}{n}\ln u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$

En remontant les équivalences, on arrive à $\Big(\exp\Big(\exp(\frac{1}{n}\ln u_n) - 1\Big) - 1\Big) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{D'après } \textbf{(4)},\ (u_n - e) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{e}{n}.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021