



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-30

Soit la suite (u_n) à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

- 1) Déterminer u_n en fonction de n
- 2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos(\pi u_n)$ et $b_n = \sin(\pi u_n)$
- a) Montrer que $\forall n \geq 1, \exists \varepsilon_n / a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite

- b) Montrer que $|\frac{\pi}{2}\varepsilon_n| \leq \frac{\pi}{64}$ et en conclure que $\forall n \geq 1, 0 < b_n \leq a_n < \frac{\pi}{4}$

3-a) Etudier sur \mathbb{R}_+ les variations de $\varphi : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$

- b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante.
- 4) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1) _____

$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1}^2 - u_k^2 = 8k + 5$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (8k + 5)$$

Le terme de gauche vaut $u_n^2 - u_0^2 = u_n^2$ (par " télescopage "). Celui de droite vaut $\frac{(5 + 8(n-1) + 5)n}{2} = n(4n + 1)$ d'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = n(4n + 1)$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n(4n + 1)} \text{ car la suite } (u_n) \text{ est à termes positifs ou nuls}$$

2-a) _____

$u_n^2 = 4n^2(1 + \frac{1}{4n})$, donc $u_n = 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} = 2n(1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{4n}\varepsilon(n))$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$. Donc

$$a_n = \cos(\pi u_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$$

De même $b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \frac{\pi}{4}$, donc par continuité des fonctions cos et sin au point $\frac{\pi}{4}$, on déduit que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-b) _____

Etudions le signe de $\varepsilon(n)$.

D'après le développement limité précédent, $\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} = (1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{4n}\varepsilon(n))$, donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 4n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - (1 + \frac{1}{8n}) \right) \\ &= 4n \frac{1 + \frac{1}{4n} - (1 + \frac{1}{8n})^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n}} \\ &= 4n \frac{-\frac{1}{64n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(n) = -\frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + (1 + \frac{1}{8n})} < 0$$

$$\left| \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \right| = \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ car } \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})} \geq 2 > 0, \text{ donc}$$

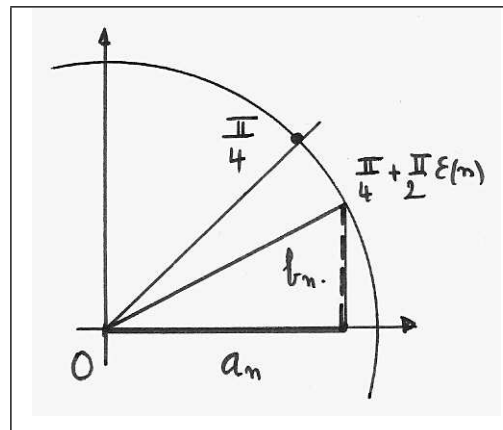
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})}} \leq \frac{1}{2} \text{ et on multiplie cette inégalité par } \frac{\pi}{32n} > 0.$$

On obtient finalement, $\left| \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \right| \leq \frac{\pi}{64n} \leq \frac{\pi}{64}$ car $n \geq 1$.

Compte tenu du signe de $\frac{\pi}{2} \varepsilon(n)$, on a l'encadrement suivant : $-\frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \leq 0$, donc

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \leq \frac{\pi}{4}$$

Sur le cercle trigonométrique, on a la situation suivante :



Il apparaît clairement que $0 < b_n \leq a_n$.

3-a)

Sur \mathbb{R}_+ , la fonction φ est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \varphi'(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} + x \frac{-\frac{1}{4x^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} + \frac{-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont positives, elles varient dans le mêmes sens que leurs carrés. Or la relation fondamentale $a_n^2 + b_n^2 = 1$ impose que les deux suites (a_n^2) et (b_n^2) varient en sens inverse. Si nous montrons que la suite (a_n) décroît, alors la suite (b_n) sera croissante.

Remarque : puisque $a_n \geq b_n$, si les suites sont adjacentes, alors nécessairement la suite (a_n) doit décroître.

Puisque $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \in [0, \frac{\pi}{4}]$, (a_n) décroît si et seulement si $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$ croît car la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc si $(\varepsilon(n))$ croît, donc si et seulement si $(-\varepsilon(n))$ décroît.

$$\text{Or } -\varepsilon(n) = \frac{1}{4} \frac{1}{4n(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n})} = \frac{1}{16} \frac{1}{\varphi(n) + n + \frac{1}{8}}$$

La fonction φ est croissante sur \mathbb{R}_+ , donc la suite $n \mapsto \varphi(n)$ est croissante, donc la suite $n \mapsto \varphi(n) + n + \frac{1}{8}$ est croissante également. Et puisque cette suite est strictement positive, son inverse $n \mapsto \frac{1}{\varphi(n) + n + \frac{1}{8}}$ est décroissante.

Nous venons de montrer que la suite $(-\varepsilon(n))$ est décroissante, donc la suite $(\varepsilon(n))$ est croissante et par conséquent, la suite (a_n) est décroissante. On en conclut que la suite (b_n) est croissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement décroissante et croissante, elles ont même limite, donc elles sont adjacentes