



## ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE-30

Soit la suite  $(u_n)$  à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

- 1) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$
- 2) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \cos(\pi u_n)$  et  $b_n = \sin(\pi u_n)$
- a) Montrer que  $\forall n \geq 1, \exists \varepsilon_n / a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$

Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont la même limite

- b) Montrer que  $|\frac{\pi}{2}\varepsilon_n| \leq \frac{\pi}{64}$  et en conclure que  $\forall n \geq 1, 0 < b_n \leq a_n < \frac{\pi}{4}$

3-a) Etudier sur  $\mathbb{R}_+$  les variations de  $\varphi : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$

- b) En déduire que la suite  $(a_n)$  est décroissante.
- 4) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1)

$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1}^2 - u_k^2 = 8k + 5$ . Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (8k + 5)$$

Le terme de gauche vaut  $u_n^2 - u_0^2 = u_n^2$  (par "télescopage"). Celui de droite vaut  $\frac{(5 + 8(n-1) + 5)n}{2} = n(4n + 1)$  d'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On en conclut :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = n(4n + 1)$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n(4n + 1)} \text{ car la suite } (u_n) \text{ est à termes positifs ou nuls}$$

2-a)

$u_n^2 = 4n^2(1 + \frac{1}{4n})$ , donc  $u_n = 2n\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} = 2n(1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{4n}\varepsilon(n))$ , avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ .

$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$ . Donc

$$a_n = \cos(\pi u_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$$

De même  $b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \frac{\pi}{4}$ , donc par continuité des fonctions cos et sin au point  $\frac{\pi}{4}$ , on déduit que les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-b)

Etudions le signe de  $\varepsilon(n)$ .

D'après le développement limité précédent,  $\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} = (1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{4n}\varepsilon(n))$ , donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 4n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - (1 + \frac{1}{8n}) \right) \\ &= 4n \frac{1 + \frac{1}{4n} - (1 + \frac{1}{8n})^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n}} \\ &= 4n \frac{-\frac{1}{64n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(n) = -\frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + (1 + \frac{1}{8n})} < 0$$

$$\left| \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \right| = \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \pi \frac{1}{64n}, \text{ car } \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})} \geq 2 > 0, \text{ donc}$$

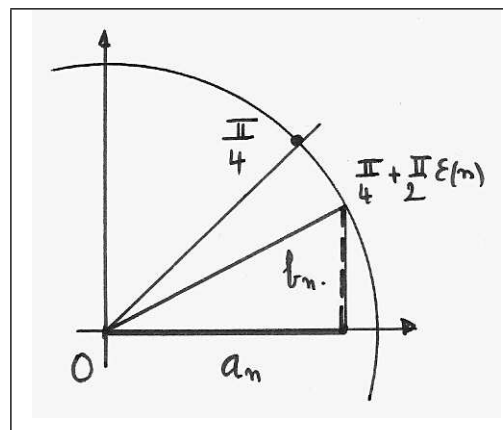
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4n} + (1 + \frac{1}{8n})}} \leq \frac{1}{2} \text{ et on multiplie cette inégalité par } \frac{\pi}{32n} > 0.$$

On obtient finalement,  $\left| \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \right| \leq \pi \frac{1}{64n} \leq \pi \frac{1}{64}$  car  $n \geq 1$ .

Compte tenu du signe de  $\frac{\pi}{2} \varepsilon(n)$ , on a l'encadrement suivant :  $-\frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \leq 0$ , donc

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \varepsilon(n) \leq \frac{\pi}{4}$$

Sur le cercle trigonométrique, on a la situation suivante :



Il apparaît clairement que  $0 < b_n \leq a_n$ .

3-a)

Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $\varphi$  est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \varphi'(x) &= \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} + x \frac{-\frac{1}{4x^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} + \frac{-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{8x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Puisque les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont positives, elles varient dans le mêmes sens que leurs carrés. Or la relation fondamentale  $a_n^2 + b_n^2 = 1$  impose que les deux suites  $(a_n^2)$  et  $(b_n^2)$  varient en sens inverse. Si nous montrons que la suite  $(a_n)$  décroît, alors la suite  $(b_n)$  sera croissante.

**Remarque** : puisque  $a_n \geq b_n$ , si les suites sont adjacentes, alors nécessairement la suite  $(a_n)$  doit décroître.

Puisque  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $(a_n)$  décroît si et seulement si  $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n))$  croît car la fonction cosinus est décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ , donc si  $(\varepsilon(n))$  croît, donc si et seulement si  $(-\varepsilon(n))$  décroît.

$$\text{Or } -\varepsilon(n) = \frac{1}{4} \frac{1}{4n(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + 1 + \frac{1}{8n})} = \frac{1}{16} \frac{1}{\varphi(n) + n + \frac{1}{8}}$$

La fonction  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc la suite  $n \mapsto \varphi(n)$  est croissante, donc la suite  $n \mapsto \varphi(n) + n + \frac{1}{8}$  est croissante également. Et puisque cette suite est strictement positive, son inverse  $n \mapsto \frac{1}{\varphi(n) + n + \frac{1}{8}}$  est décroissante.

Nous venons de montrer que la suite  $(-\varepsilon(n))$  est décroissante, donc la suite  $(\varepsilon(n))$  est croissante et par conséquent, la suite  $(a_n)$  est décroissante. On en conclut que la suite  $(b_n)$  est croissante.

**Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont respectivement décroissante et croissante, elles ont même limite, donc elles sont adjacentes**