ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−29

1) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0) \Longleftrightarrow (\exists\, (R, S) \in (\mathbb{R}[X])^2\ /\ P = R^2 + S^2)$

Ind : on pourra décomposer P dans $\mathbb{C}_2[X]$

2) Généralisation : soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0) \Longleftrightarrow (\exists\, (R, S) \in (\mathbb{R}[X])^2\ /\ P = R^2 + S^2)$$

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1)

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si P a un degré égal à 1, alors il change évidemment de signe.

Si $P \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors P est une constante ou un polynôme de degré 2.

- Si P est une constante, cette constante, K est positive, donc $P = (\sqrt{K})^2 + 0^2$. $R = \sqrt{K}$ et $S = 0$ conviennent.
- Si $\deg(P) = 2$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \ / \ P = aX^2 + bX + c$.

La limite de P en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $a > 0$.

$P = a(X + \dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

$b^2 - 4ac \leq 0$ sinon le polynôme P aurait deux racines réelles distinctes, donc il changerait de signe. Puisque $a > 0$, alors $\dfrac{4ac - b^2}{4a} \geq 0$.

Posons $R = \sqrt{a}(X + \dfrac{b}{2a})$ et $S = \sqrt{\dfrac{4ac - b^2}{4a}}$, on a bien $P = R^2 + S^2$.

2)

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. Alors on peut écrire $P = a_n X^n + Q$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg(Q) \leq n - 1$.

$P(x) \underset{(|x| \to +\infty)}{=\sim} a_n x^n$. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$, alors $\lim\limits_{|x| \to +\infty} a_n x^n$ vaut $+\infty$

Lorsque $x \to +\infty$, cela impose $a_n > 0$ et lorsque $x \to -\infty$ cela impose n pair.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0 \Longrightarrow P = a_{2p} X^{2p} + Q$ avec $a_{2p} > 0$ et $p \geq 0$ (notons que les cas $p = 0$ et $p = 1$ ont été traités dans la question 1).

Faisons alors une récurrence sur p

Pour $p = 0$ et $p = 1$, c'est déjà fait.

Soit $P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$ et $\deg(P) = 2p + 2$.

D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme P admet au moins une racine $x_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors cette racine est d'ordre au moins égal à 2.

En effet, si l'ordre de la racine x_0 était 1, on pourrait écrire $P = (X - x_0)Q$, avec $Q(x_0) \neq 0$. Par continuité de la fonction Q au point x_0, celle-ci garde un signe constant (celui de $Q(x_0)$) au voisinage de x_0. Donc le signe de P change au voisinage de x_0 puisque celui de $x - x_0$ change.

On peut donc écrire $P = (X - x_0)^2 Q_1$ avec $\deg(Q_1) = 2p$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, $P(x)$ et $Q_1(x)$ ont le même signe ou nuls en même temps. Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\},\ Q_1(x) \geq 0$. Par continuité au point x_0, $Q_1(x_0) \geq 0$.

Donc $\deg(Q_1) = 2p$ et $Q_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q_1 :

Il existe $(R_1, S_1) \in (\mathbb{R}[X])^2 \ / \ Q_1 = R_1^2 + S_1^2$.

On obtient alors $P = ((X - x_0)R_1)^2 + ((X - x_0)S_1)^2$. Les polynômes $R = (X - x_0)R_1$ et $S = (X - x_0)S_1$ conviennent.

- Si $x_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, alors $\overline{x_0}$ est aussi racine de P et on peut écrire :

$P = (X - x_0)(X - \overline{x_0})Q_2$.

Le polynôme $(X - x_0)(X - \overline{x_0})$ n'a pas de racines rélles, il garde un signe constant, celui de X^2, donc il est strictement positif.

D'après la question 1), on peut écrire $(X - x_0)(X - \overline{x_0}) = A^2 + B^2$ où A et B sont des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Puisque $P \geq 0$ et $(X - x_0)(X - \overline{x_0}) > 0$, il s'ensuit que $Q_2 \geq 0$. De plus $\deg(Q_1) = 2p$; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et écrire $Q_2 = C^2 + D^2$, où C et D sont des polynômes. On obtient

$$\begin{aligned}
P &= (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) \\
&= A^2C^2 + A^2D^2 + B^2C^2 + B^2D^2 \\
&= (A^2C^2 + B^2D^2) + A^2D^2 + B^2C^2 \\
&= (AC + BD)^2 - 2ACBD + A^2D^2 + B^2C^2 \\
&= (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2
\end{aligned}$$

Les polynômes $R_2 = AC + BD$ et $S_2 = AD - BC$ conviennent.

La propriété est donc héréditaire et par principe de récurrence elle est vraie pour toutes les puissances (paires nécessairement) de P

