



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ-37

Soit a, b, c trois réels et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $C(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / XM = MX\}$

1) Montrer que $C(M)$ est un espace vectoriel.

2) On suppose dans cette question que $ac > 0$.

Déterminer les éléments propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?

On suppose désormais que $ac > 0$ et $b^2 \neq ac$.

3-a) Soit X un élément de $C(M)$. Soit λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

Montrer qu'il existe un réel α tel que $XU = \alpha U$.

b) En déduire que X est diagonalisable.

4-a) Déterminer la dimension de $C(M)$.

b) Donner une base de $C(M)$ lorsque $a = c$. L'espace $C(M)$ est-il alors constitué de matrices symétriques ?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1) _____

$C(M) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$C(M)$ n'est pas vide car il contient la matrice nulle (il contient aussi la matrice I_3 et la matrice M).

Soit X et X' deux matrices appartenant à $C(M)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (X + \alpha X')M &= XM + \alpha X'M \\ &= MX + \alpha MX' \quad \text{puisque } X \text{ et } X' \text{ sont dans } C(M) \\ &= M(X + \alpha X') \end{aligned}$$

Donc $X + \alpha X'$ appartient à $C(M)$. On conclut que $C(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) _____

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de M si et seulement si le système $(M - \lambda I_3)Y = (0)$

n'est pas de Cramer ($Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} (M - \lambda I_3)Y = (0) &\iff \begin{cases} -\lambda x + cz = 0 \\ (b - \lambda)y = 0 \\ ax - \lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax - \lambda z = 0 \\ (b - \lambda)y = 0 \\ -\lambda x + cz = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} ax - \lambda z = 0 \\ (b - \lambda)y = 0 \\ (ac - \lambda^2)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière opération est licite puisque $ac > 0 \implies a \neq 0$.

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda = b$ ou $\lambda^2 = ac$. Donc

$$\boxed{\text{spect}(M) = \{b, -\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}}$$

Il est clair que $ac > 0 \implies -\sqrt{ac} \neq \sqrt{ac}$. Il faut donc considérer les deux cas : $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$ ou $b \in \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$.

• Si $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$, M admet 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Remarquons que $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\} \iff b^2 \neq ac$.

Notons, d'une manière générale, $E(\lambda, M)$ le sous-espace propre de M associé à la

valeur propre λ . Considérons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$* \quad Y \in E(b, M) \iff \begin{cases} ax - bz = 0 \\ (ac - b^2)z = 0 \end{cases} \iff z = 0, x = 0, y \in \mathbb{R} \text{ puisque } ac - b^2 \neq 0$$

ainsi que a .

$$E(b, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$* \quad Y \in E(\sqrt{ac}, M) \iff \begin{cases} ax - \sqrt{ac}z = 0 \\ (b - \sqrt{ac})y = 0 \end{cases} \iff y = 0, \sqrt{a}x - \sqrt{c}z = 0 \text{ car } b - \sqrt{ac} \neq 0.$$

$$E(\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \right).$$

$$* Y \in E(-\sqrt{ac}, M) \iff \begin{cases} ax + \sqrt{ac}z = 0 \\ (b + \sqrt{ac})y = 0 \end{cases} \iff y = 0, \sqrt{a}x + \sqrt{c}z = 0 \text{ car } b + \sqrt{ac} \neq 0.$$

$$E(-\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \right).$$

La matrice M est diagonalisable

• • Si $b = \sqrt{ac}$; alors $b^2 = ac$.

$$* Y \in E(\sqrt{ac}, M) \iff ax - \sqrt{ac}z = 0 \iff z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E(\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad \dim E(\sqrt{ac}, M) = 2.$$

$$* Y \in E(-\sqrt{ac}, M) \iff \begin{cases} ax + \sqrt{ac}z = 0 \\ 2\sqrt{ac}y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{a}x + \sqrt{c}z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E(-\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \right).$$

La matrice M est diagonalisable

• • • Si $b = -\sqrt{ac}$; alors $b^2 = ac$.

Un calcul tout-à-fait analogue donnera

$$E(\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} \right).$$

$$E(-\sqrt{ac}, M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \quad \dim E(\sqrt{ac}, M) = 2.$$

La matrice M est diagonalisable

3-a)

Nous sommes dans le cas où $\text{Card}(\text{spect}(M)) = 3$; les trois sous-espaces propres sont de dimensions 1.

Soit $X \in C(M)$.

Soit $\lambda \in \text{spect}(M)$ et U une colonne propre associée. Il en résulte que $E(\lambda, M) = \text{vect}(U)$.

$MU = \lambda U \implies XMU = X(\lambda U) = \lambda XU$. Or $XM = MX$, donc $XMU = MXU$ et on obtient l'égalité $M(XU) = \lambda(XU)$. La colonne XU (qui n'est peut-être pas une colonne propre - elle peut être nulle) appartient à $E(\lambda, M) = \text{vect}(U)$. Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $XU = \alpha U$.

Le vecteur U est vecteur propre de X

3-b)

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs propres de M et U_1, U_2, U_3 trois vecteurs propres associés.

La famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque M est diagonalisable. Si nous notons α_i la valeur propre de X associée à U_i ($1 \leq i \leq 3$), alors (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de X .

La matrice X est diagonalisable

4-a)

Notons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1}$ (on exprime ainsi que M est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base formée de vecteurs propres de M).

Avec les notations précédentes, $X \in C(M) \implies X = P \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P^{-1}$.

Réciproquement, soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ trois réels et $Z = P \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) P^{-1}$.

$$ZM = P \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) P^{-1} P \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1} = P \text{Diag}(\beta_1 \lambda_1, \beta_2 \lambda_2, \beta_3 \lambda_3) P^{-1}$$

$$MZ = P \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1} P \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) P^{-1} = P \text{Diag}(\lambda_1 \beta_1, \lambda_2 \beta_2, \lambda_3 \beta_3) P^{-1}$$

$$\text{Donc } ZM = MZ$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} C(M) &= \{P \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) P^{-1}, (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{vect}(P \text{Diag}(1, 0, 0) P^{-1}, P \text{Diag}(0, 1, 0) P^{-1}, P \text{Diag}(0, 0, 1) P^{-1}) \end{aligned}$$

L'application φ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\forall T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(T) = PTP^{-1}$ est manifestement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La linéarité ne pose aucun problème et $\varphi(T) = (0) \iff T = (0)$. L'endomorphisme φ est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie 9, c'est donc un automorphisme.

La famille $(\text{Diag}(1, 0, 0), \text{Diag}(0, 1, 0), \text{Diag}(0, 0, 1))$ est une famille libre en tant que sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc la famille $(\varphi(\text{Diag}(1, 0, 0)), \varphi(\text{Diag}(0, 1, 0)), \varphi(\text{Diag}(0, 0, 1)))$ l'est également.

$(P \text{Diag}(1, 0, 0) P^{-1}, P \text{Diag}(0, 1, 0) P^{-1}, P \text{Diag}(0, 0, 1) P^{-1})$
est une base de $C(M) : \dim C(M) = 3$

4-b)

Si $a = c$, la matrice M est symétrique. On peut choisir P orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1} = {}^tP$

Soit $X \in C(M)$; $X = P \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) {}^tP$

$${}^tX = {}^t(P \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) {}^tP) = P \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P = X$$

$C(M)$ est formé de matrices symétriques