ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–37

Soit a, b, c trois réels et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $C(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ XM = MX\}$

1) Montrer que $C(M)$ est un espace vectoriel.

2) On suppose dans cette question que $ac > 0$.

Déterminer les éléments propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On suppose désormais que $ac > 0$ et $b^2 \neq ac$.

3–a) Soit X un élément de $C(M)$. Soit λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

Montrer qu'il existe un réel α tel que $XU = \alpha U$.

b) En déduire que X est diagonalisable.

4–a) Déterminer la dimension de $C(M)$.

b) Donner une base de $C(M)$ lorsque $a = c$. L'espace $C(M)$ est-il alors constitué de matrices symétriques ?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1)

$C(M) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$C(M)$ n'est pas vide car il contient la matrice nulle (il contient aussi la matrice I_3 et la matrice M).

Soit X et X' deux matrices appartenant à $C(M)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(X+\alpha X')M &= XM+\alpha X'M \\ &= MX+\alpha MX' \quad \text{puisque } X \text{ et } X' \text{ sont dans } C(M) \\ &= M(X+\alpha X')\end{aligned}$$

Donc $X+\alpha X'$ appartient à $C(M)$. On conclut que $C(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de M si et seulement si le système $(M-\lambda I_3)Y=(0)$ n'est pas de Cramer ($Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

$$(M-\lambda I_3)Y=(0) \iff \begin{cases}-\lambda x+cz &=0\\ (b-\lambda)y &=0\\ ax \quad -\lambda z &=0\end{cases} \underset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases}ax \quad -\lambda z &=0\\ (b-\lambda)y &=0\\ -\lambda x+cz &=0\end{cases}$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow aL_3+\lambda L_1}{\iff} \begin{cases}ax \qquad\qquad -\lambda z &=0\\ \quad (b-\lambda)y &=0\\ \qquad (ac-\lambda^2)z &=0\end{cases}$$

Cette dernière opération est licite puisque $ac>0 \Longrightarrow a \neq 0$.

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda=b$ ou $\lambda^2=ac$. Donc

$$\boxed{\operatorname{spect}(M)=\{b,-\sqrt{ac},\sqrt{ac}\}}$$

Il est clair que $ac>0 \Longrightarrow -\sqrt{ac} \neq \sqrt{ac}$. Il faut donc considérer les deux cas : $b \notin \{-\sqrt{ac},\sqrt{ac}\}$ ou $b \in \{-\sqrt{ac},\sqrt{ac}\}$.

- Si $b \notin \{-\sqrt{ac},\sqrt{ac}\}$, M admet 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Remarquons que $b \notin \{-\sqrt{ac},\sqrt{ac}\} \iff b^2 \neq ac$.

Notons, d'une manière générale, $E(\lambda,M)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ. Considérons $Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$*$ $\quad Y \in E(b,M) \iff \begin{cases}ax \qquad -bz &=0\\ \quad (ac-b^2)z &=0\end{cases} \iff z=0,\ x=0,\ y \in \mathbb{R}$ puisque $ac-b^2 \neq 0$ ainsi que a.

$E(b,M)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$*$ $\quad Y \in E(\sqrt{ac},M) \iff \begin{cases}ax \qquad -\sqrt{ac}z &=0\\ (b-\sqrt{ac})y &=0\end{cases} \iff y=0,\ \sqrt{a}x-\sqrt{c}z=0$ car $b-\sqrt{ac} \neq 0$.

$E(\sqrt{ac},M)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix}\right)$.

$*\quad Y\in E(-\sqrt{ac},M)\iff\left\{\begin{array}{rl} ax \quad\quad + \sqrt{ac}z & =0\\ (b+\sqrt{ac})y & =0\end{array}\right.\iff y=0,\ \sqrt{a}x+\sqrt{c}z=0$ car $b+\sqrt{ac}\neq 0$.

$E(-\sqrt{ac},M)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\textbf{La matrice } M \textbf{ est diagonalisable}}$$

$\bullet\bullet$ Si $b=\sqrt{ac}$; alors $b^2=ac$.

$*\quad Y\in E(\sqrt{ac},M)\iff ax-\sqrt{ac}z=0\iff z=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in\mathbb{R}$

$$Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$E(\sqrt{ac},M)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. $\qquad \dim E(\sqrt{ac},M)=2$.

$*\quad Y\in E(-\sqrt{ac},M)\iff\left\{\begin{array}{rl} ax+\sqrt{ac}z & =0\\ 2\sqrt{ac}y & =0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl} \sqrt{a}x+\sqrt{c}z & =0\\ y & =0\end{array}\right.$

$E(-\sqrt{ac},M)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix}\right)$.

$$\boxed{\textbf{La matrice } M \textbf{ est diagonalisable}}$$

$\bullet\bullet\bullet$ Si $b=-\sqrt{ac}$; alors $b^2=ac$.

Un calcul tout-à-fait analogue donnera

$E(\sqrt{ac},M)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix}\right)$.

$E(-\sqrt{ac},M)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-\sqrt{c}\\0\\\sqrt{a}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. $\qquad \dim E(\sqrt{ac},M)=2$.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est diagonalisable}}$$

3–a)

Nous sommes dans le cas où $\mathrm{Card}(\mathrm{spect}(M))=3$; les trois sous-espaces propres sont de dimensions 1.

Soit $X\in C(M)$.

Soit $\lambda\in\mathrm{spect}(M)$ et U une colonne propre associée. Il en résulte que $E(\lambda,M)=\mathrm{vect}(U)$.

$MU=\lambda U\Longrightarrow XMU=X(\lambda U)=\lambda XU$. Or $XM=MX$, donc $XMU=MXU$ et on obtient l'égalité $M(XU)=\lambda(XU)$. La colonne XU (qui n'est peut-être pas une colonne propre - elle peut être nulle) appartient à $E(\lambda,M)=\mathrm{vect}(U)$. Donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $XU=\alpha U$.

$$\boxed{\text{Le vecteur } U \text{ est vecteur propre de } X}$$

3–b)

Notons $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ les trois valeurs propres de M et U_1, U_2, U_3 trois vecteurs propres associés.

La famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque M est diagonalisable. Si nous notons α_i la valeur propre de X associée à U_i $(1 \leq i \leq 3)$, alors (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de X.

$$\boxed{\text{La matrice } X \text{ est diagonalisable}}$$

4–a)

Notons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1}$ (on exprime ainsi que M est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base formée de vecteurs propres de M).

Avec les notations précédentes, $X \in C(M) \Longrightarrow X = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1}$.

Réciproquement, soit $\beta_1\beta_2, \beta_3$ trois réels et $Z = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1}$.

$ZM = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1}P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1\lambda_1, \beta_2\lambda_2, \beta_3\lambda_3)P^{-1}$

$MZ = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1}P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \lambda_3\beta_3)P^{-1}$

$$\text{Donc } ZM = MZ$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} C(M) &= \{P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1},\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{vect}(P\,\mathrm{Diag}(1,0,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,1,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1}) \end{aligned}$$

L'application φ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \varphi(T) = PTP^{-1}$ est manifestement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La linéarité ne pose aucun problème et $\varphi(T) = (0) \Longleftrightarrow T = (0)$. L'endomorphisme φ est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie 9, c'est donc un automorphisme.

La famille $(\mathrm{Diag}(1,0,0), \mathrm{Diag}(0,1,0), \mathrm{Diag}(0,0,1))$ est une famille libre en tant que sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc la famille $\Big(\varphi(\mathrm{Diag}(1,0,0)), \varphi(\mathrm{Diag}(0,1,0)), \varphi(\mathrm{Diag}(0,0,1))\Big)$ l'est également.

$$\boxed{\begin{array}{l} (P\,\mathrm{Diag}(1,0,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,1,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1}) \\ \text{est une base de } C(M) : \dim C(M) = 3 \end{array}}$$

4–b)

Si $a = c$, la matrice M est symétrique. On peut choisir P orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1} = {}^tP$

Soit $X \in C(M)$; $X = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP$

${}^tX = {}^t({}^tP)^t\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP = X$

$$\boxed{C(M) \text{ est formé de matrices symétriques}}$$