



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ-36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq (0)$ et $A^3 + A = (0)$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^n et on note Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^n .

1) Dans cette question on suppose que A est inversible.

a) Justifier que f vérifie : $f \circ f = -\text{Id}$.

b) Soit u et v deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Montrer que si la famille $(u, v, f(u))$ est libre, alors la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre aussi.

c) En déduire que n ne peut pas être égal à 3.

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

2) On note $F = \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.

a) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus F$.

b) Montrer que F est stable par f et que $\dim(F) \neq 1$.

c) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.

3-a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$, e_2 un vecteur non nul de F et $e_3 = f(e_2)$.

Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

b) Exprimer la matrice B de f dans cette base.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 36

1-a) _____

Si A est inversible, alors on multiplie l'égalité $A^3 + A = (0)$ par A^{-1} (peut importe le côté) ; on obtient $A^2 + I_n = (0)$, ce qui se traduit par $f^2 = -\text{Id}_E$.

1-b) _____

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / au + bv + cf(u) + df(v) = 0_E$ (1)

Prenons l'image par f et tenons compte du fait que $f^2 = -\text{Id}_E$; on obtient $-cu - dv + af(u) + bf(v) = 0_E$. Finalement on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} au + bv + cf(u) + df(v) &= 0_E \\ -cu - dv + af(u) + bf(v) &= 0_E \end{cases}$$

• Supposons $d \neq 0$. Et effectuons $L_2 \leftarrow dL_2 - bL_1$. On a le système équivalent :

$$\begin{cases} au + bv + cf(u) + df(v) &= 0_E \\ -(ab + dc)u - (b^2 + d^2)v + (ad - cb)f(u) &= 0_E \end{cases}$$

Puisque la famille $(u, v, f(u))$ est libre, la deuxième équation donne $ab + dc = 0$, $b^2 + d^2 = 0$ et $ad - bc = 0$. Or $b^2 + d^2 = 0$ est impossible dans \mathbb{R} . Donc on ne peut pas supposer $d \neq 0$.

• Il s'ensuit que $d = 0$ et l'équation (1) devient $au + bv + cf(u) = 0_E$. La famille $(u, v, f(u))$ est libre, on en déduit $a = b = c = 0$.

L'équation $au + bv + cf(u) + df(v) = 0_E$ implique $a = b = c = d = 0$: la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre.

1-c) _____

L'endomorphisme f est bijectif, donc il n'admet pas 0 pour valeur propre. Or $A^3 + A = (0)$ implique que le polynome $X^3 + X$ est annulateur de f . Les éventuelles valeurs propres réelles de f sont racines réelles de P , c'est-à-dire 0. Donc f n'a pas de valeurs propres réelles.

Soit $u \neq 0_E$; $(u, f(u))$ est libre, sinon $f(u)$ serait colinéaire à u , ce qui voudrait dire que u est vecteur propre de f , ce qui n'est pas possible.

Si $n = 3$, on peut compléter cette famille libre par un autre vecteur v tel que $(u, v, f(u))$ soit une base de E (théorème de la base incomplète), donc une famille libre. D'après la question précédente, la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre, ce qui est impossible.

Conclusion : la dimension n de E ne peut pas être égale à 3 quand A est inversible

2-a) _____

Remarquons que $A^3 + A = (0) \iff f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit $u \in E$. Supposons qu'il existe $(v, w) \in \text{Ker } f \times F / u = v + w$.

Prenons l'image par f . On obtient $f(u) = f(v) + f(w) = f(w)$ (car $v \in \text{Ker } f$).

Mais $w \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$, donc $w = -f^2(w)$. Or $f^2(u) = f^2(w)$, donc $f^2(u) = f^2(w) = -w$.

On en déduit que $v = u - w = u + f^2(u)$.

Conclusion : s'il existe $(v, w) \in \text{Ker } f \times F / u = v + w$, alors v et w sont uniques et donnés par $w = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$.

Synthèse : soit $u \in E$; considérons les vecteurs $w = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$.

Il est clair que $u = v + w$.

$f(v) = f(u) + f^3(u) = 0_E$ puisque $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)} : f \in \text{Ker } f$.
 $f^2(w) = -f^4(u) = -f^3(f(u)) = f(f(u)) = f^2(u) = -w : \text{donc } (f^2 + \text{Id}_E)(w) = 0_E : w \in F$.
 $\forall u \in E, \exists!(v, w) \in \text{Ker } f \times F / u = v + w$.

Cela veut dire que Ker f et F sont supplémentaires dans E.

2-b)

Soit $x \in F$, alors $f^2(x) + x = 0_E$. Il s'ensuit que :

$f(f^2(x) + x) = 0_E$ ou encore $(f^2 + \text{Id}_E)(f(x)) = 0_E$. Cela veut dire que $f(x) \in F$.

F est stable par f .

Si $\dim F = 1$, alors il existe $e \in E / F = \text{vect}(e)$. Par stabilité, $f(e) \in F$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R} / f(e) = \lambda e$. **Le vecteur e serait vecteur propre de f .**

Or $A^3 + A = (0)$ implique que le polynome $X^3 + X$ est annulateur de f . Les éventuelles valeurs propres de f sont racines de P . Dans \mathbb{R} , P n'admet qu'une racine : 0. On aurait donc que e est vecteur propre associé à la valeur propre 0, donc e serait dans $\text{Ker } f$. Il serait dans $\text{Ker } f \cap F$, et par conséquent il serait nul puisque $\text{Ker } f$ et F sont supplémentaires. Ce qui est impossible car (e) est une base de F .

Conclusion : la dimension de F n'est pas égale à 1

2-c)

On a $\dim \text{Ker } f + \dim F = 3$, donc $\dim \text{Ker } f \neq 2$.

f n'est pas nul, donc $\dim \text{Ker } f \neq 3$. Il reste $\dim \text{Ker } f = 0$ ou 1.

Si $\dim \text{Ker } f = 0$, alors d'après la question 1), on ne peut avoir $n = 3$. Donc $\dim \text{Ker } f \neq 0$.

Conclusion : $\dim \text{Ker } f = 1$.

3-a)

Soit e_1 une base de $\text{Ker } f$. Le vecteur e_3 appartient à F puisque $e_3 = f(e_2)$, $e_2 \in F$ et F est stable par f .

La famille (e_2, e_3) est libre ; en effet, si cette famille est liée, il existe, puisque $e_2 \neq 0_E$, $\lambda \in \mathbb{R} / e_3 = \lambda e_2$, donc $f(e_2) = \lambda e_2$. Le vecteur e_2 est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . La seule valeur propre réelle de f est zéro. Il en résulte que $f(e_2) = 0_E$, donc e_2 est dans $\text{Ker } f$. Finalement $e_2 \in \text{Ker } f \cap F = \{0_E\}$ et $e_2 = 0_E$.

Mais cela est impossible puisque $e_2 \neq 0_E$ par hypothèse.

Il s'ensuit que (e_2, e_3) est une base de F , donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E puisque E et F sont supplémentaires dans E .

3-a)

Dans cette base, $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$