ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq (0)$ et $A^3 + A = (0)$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1) Dans cette question on suppose que A est inversible.

a) Justifier que f vérifie : $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

b) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si la famille $(u, v, f(u))$ est libre, alors la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre aussi.

c) En déduire que n ne peut pas être égal à 3.

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

2) On note $F = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \bigoplus F$.

b) Montrer que F est stable par f et que $\dim(F) \neq 1$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

3–a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, e_2 un vecteur non nul de F et $e_3 = f(e_2)$. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

b) Exprimer la matrice B de f dans cette base.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 36

1–a)

Si A est inversible, alors on multiplie l'égalité $A^3+A=(0)$ par A^{-1} (peut importe le côté) ; on obtient $A^2+I_n=(0)$, ce qui se traduit par $f^2=-\mathrm{Id}_E$.

1–b)

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ / $au+bv+cf(u)+df(v)=0_E$ **(1)**

Prenons l'image par f et tenons compte du fait que $f^2=-\mathrm{Id}_E$; on obtient $-cu-dv+af(u)+bf(v)=0_E$. Finalement on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} au+bv+cf(u)+df(v) & =0_E \\ -cu-dv+af(u)+bf(v) & =0_E \end{cases}$$

- Supposons $d\neq 0$. Et effectuons $L_2\longleftarrow dL_2-bL_1$. On a le système équivalent :

$$\begin{cases} au+bv+cf(u)+df(v) & =0_E \\ -(ab+dc)u-(b^2+d^2)v+(ad-cb)f(u) & =0_E \end{cases}$$

Puisque la famille $(u,v,f(u))$ est libre, la deuxième équation donne $ab+dc=0$, $b^2+d^2=0$ et $ad-bc=0$. Or $b^2+d^2=0$ est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc on ne peut pas supposer $d\neq 0$.

- Il s'ensuit que $d=0$ et l'équation **(1)** devient $au+bv+cf(u)=0_E$. La famille $(u,v,f(u))$ est libre, on en déduit $a=b=c=0$.

L'équation $au+bv+cf(u)+df(v)=0_E$ implique $a=b=c=d=0$: la famille $(u,v,f(u),f(v))$ est libre.

1–c)

L'endomorphisme f est bijectif, donc il n'admet pas 0 pour valeur propre. Or $A^3+A=(0)$ implique que le polynome X^3+X est annulateur de f. Les éventuelles valeurs propres réelles de f sont racines réelles de P, c'est-à-dire 0. Donc f n'a pas de valeurs propres réelles.

Soit $u\neq 0_E$; $(u,f(u))$ est libre, sinon $f(u)$ serait colinéaire à u, ce qui voudrait dire que u est vecteur propre de f, ce qui n'est pas possible.

Si $n=3$, on peut compléter cette famille libre par un autre vecteur v tel que $(u,v,f(u))$ soit une base de E (théorème de la base incomplète), donc une famille libre. D'après la question précédente, la famille $(u,v,f(u),f(v))$ est libre, ce qui est impossible.

Conclusion : la dimension n de E ne peut pas être égale à 3 quand A est inversible

2–a)

Remarquons que $A^3+A=(0)\iff f^3+f=0_{\mathcal{L}(E)}$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit $u\in E$. Supposons qu'il existe $(v,w)\in\mathrm{Ker}\, f\times F$ / $u=v+w$.

Prenons l'image par f. On obtient $f(u)=f(v)+f(w)=f(w)$ (car $v\in\mathrm{Ker}\, f$).

Mais $w\in\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{Id}_E)$, donc $w=-f^2(w)$. Or $f^2(u)=f^2(\omega)$, donc $f^2(u)=f^2(w)=-w$.

On en déduit que $v=u-w=u+f^2(u)$.

Conclusion : s'il existe $(v,w)\in\mathrm{Ker}\, f\times F$ / $u=v+w$, alors v et ω sont uniques et donnés par $w=-f^2(u)$ et $v=u+f^2(u)$.

Synthèse : soit $u\in E$; considérons les vecteurs $w=-f^2(u)$ et $v=u+f^2(u)$.

Il est clair que $u=v+w$.

$f(v) = f(u) + f^3(u) = 0_E$ puisque $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$: $f \in \operatorname{Ker} f$.

$f^2(w) = -f^4(u) = -f^3(f(u)) = f(f(u)) = f^2(u) = -w$: donc $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(w) = 0_E$: $w \in F$.

$$\forall u \in E,\ \exists!(v, w) \in \operatorname{Ker} f \times F \ / \ u = v + w.$$

Cela veut dire que $\operatorname{Ker} f$ et F sont supplémentaires dans E.

2–b)

Soit $x \in F$, alors $f^2(x) + x = 0_E$. Il s'ensuit que :

$f(f^2(x) + x) = 0_E$ ou encore $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(f(x)) = 0_E$. Cela veut dire que $f(x) \in F$.

F est stable par f.

Si $\dim F = 1$, alors il existe $e \in E \ / \ F = \mathrm{vect}(e)$. Par stabilité, $f(e) \in F$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R} \ / \ f(e) = \lambda e$. **Le vecteur e serait vecteur propre de f.**

Or $A^3 + A = (0)$ implique que le polynome $X^3 + X$ est annulateur de f. Les éventuelles valeurs propres de f sont racines de P. Dans $\mathbb{R}$, P n'admet qu'une racine : 0. On aurait donc que e est vecteur propre associé à la valeur propre 0, donc e serait dans $\operatorname{Ker} f$. Il serait dans $\operatorname{Ker} f \cap F$, et par conséquent il serait nul puisque $\operatorname{Ker} f$ et F sont supplémentaires. Ce qui est impossible car (e) est une base de F.

Conclusion : la dimension de F n'est pas égale à 1

2–c)

On a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim F = 3$, donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 2$.

f n'est pas nul, donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 3$. Il reste $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ ou 1.

Si $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, alors d'après la question 1), on ne peut avoir $n = 3$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 0$.

Conclusion : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

3–a)

Soit e_1 une base de $\operatorname{Ker} f$. Le vecteur e_3 appartient à F puisque $e_3 = f(e_2)$, $e_2 \in F$ et F est stable par f.

La famille (e_2, e_3) est libre ; en effet, si cette famille est liée, il existe, puisque $e_2 \neq 0_E$, $\lambda \in \mathbb{R} \ / \ e_3 = \lambda e_2$, donc $f(e_2) = \lambda e_2$. Le vecteur e_2 est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. La seule valeur propre réelle de f est zéro. Il en résulte que $f(e_2) = 0_E$, donc e_2 est dans $\operatorname{Ker} f$. Finalement $e_2 \in \operatorname{Ker} f \cap F = \{0_E\}$ et $e_2 = 0_E$.

Mais cela est impossible puisque $e_2 \neq 0_E$ par hypothèse.

Il s'ensuit que (e_2, e_3) est une base de F, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E puisque E et F sont supplémentaires dans E.

3–a)

Dans cette base, $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$