



ALGÈBRE LINÉAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–35

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^p muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On désigne par $\| \cdot \|$ la norme associée.

L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre p .

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

On dit qu'une matrice est positive si elle est symétrique et si $\langle AC, C \rangle \geq 0$ pour toute colonne $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

On note Id l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^p .

1) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée ; on désigne par u l'endomorphisme de \mathbb{R}^p dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^p est A . Si λ est une valeur propre de A , on note p_λ le projecteur orthogonal de \mathbb{R}^p sur le sous-espace propre $E(\lambda) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.

a) Justifier les propriétés suivantes :

- $p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} p_\lambda = \text{Id}$.

b) Montrer que l'endomorphisme $v = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$ vérifie $v \circ v = u$.

En déduire que la matrice R associée à v est solution de l'équation $X^2 = A$.

c) Soit Y une matrice positive telle que $Y^2 = A$. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à Y . Montrer que $\sigma(Y) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Prouver ensuite que si $\lambda \in \sigma(A)$, on a $F_{\sqrt{\lambda}} = \text{Ker}(w - \sqrt{\lambda} \text{Id}) \subset E(\lambda)$.

En déduire que $w = v$, puis qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note \sqrt{A} .

d) Montrer que la matrice \sqrt{A} commute avec A .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1)

Sens direct : soit λ une valeur propre de A ; il existe une colonne $Y \neq (0)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $AY = \lambda Y$.

$\langle AY, Y \rangle = \langle \lambda Y, Y \rangle = \lambda \|Y\|^2$. Puisque $Y \neq (0)$, alors $\|Y\|^2 > 0$.

L'égalité précédente devient $\lambda = \frac{\langle AY, Y \rangle}{\|Y\|^2} \geq 0$ puisque A est une matrice positive.

Sens réciproque : notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ le spectre de A , noté $\sigma(A)$ dans l'énoncé. Notons $F(\lambda_i)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i , c'est-à-dire $F(\lambda_i) = \text{Ker}(A - \lambda_i I)$.

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable et on a donc :

$$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^r F(\lambda_i).$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \exists (Y_1, \dots, Y_r) \in F(\lambda_1) \times \dots \times F(\lambda_r) / Y = \sum_{i=1}^r Y_i.$$

$$AY = A\left(\sum_{i=1}^r Y_i\right) = \sum_{i=1}^r AY_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i Y_i.$$

Puisque les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, on a :

$\forall (i, j) \in ([1, r])^2, i \neq j \implies \langle Y_i, Y_j \rangle = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \langle AY, Y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i Y_i, \sum_{i=1}^r Y_i \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq r} \langle \lambda_i Y_i, Y_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle Y_i, Y_i \rangle \\ \langle AY, Y \rangle &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \|Y_i\|^2 \geq 0 \text{ puisque les valeurs propres sont } \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que A soit symétrique : A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles

2-a)

On sait que $E = \mathbb{R}^p = \bigoplus_{i=1}^r E(\lambda_i)$ et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux,

Pour tout $k \in [1, r]$, notons $E_k = \bigoplus_{i \neq k} E(\lambda_i)$. Alors E_k est le sous-espace orthogonal supplémentaire de $E(\lambda_k)$. En effet, il est clair que $E(\lambda_k)$ et E_k sont supplémentaires puisque la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_k)$ et de E_k est en fait la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_r)$ donc c'est une base de E .

D'autre part, $E(\lambda_k)$ est orthogonal à tous les $E(\lambda_i)$ pour $i \neq k$, donc par linéarité du produit scalaire, il est orthogonal à leur somme, E_k .

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists (x_1, \dots, x_r) \in E(\lambda_1) \times \dots \times E(\lambda_r) / x = \sum_{i=1}^r x_i = x_k + \sum_{i \neq k} x_i$$

Donc $p_{\lambda_k}(x) = x_k$ puisque $\sum_{i \neq k} x_i \in E_k$

Considérons $j \neq k$, alors $x_k \in E_j = \bigoplus_{i \neq j} E(\lambda_i)$, car E_j contient $E(\lambda_k)$; par conséquent

$$P_{\lambda_j}(x_k) = 0.$$

Ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R}^p, p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k}(x) = 0$.

$$\forall (k, j) \in ([1, r])^2, k \neq j \implies p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k} = 0$$

On vient de voir que $\forall x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i = p_{\lambda_i}(x)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^r p_{\lambda_i}(x) = \left(\sum_{i=1}^r p_{\lambda_i} \right)(x) : \sum_{i=1}^r p_{\lambda_i} = \text{Id}_E$$

2-b)

Soit $v = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}$.

$$\begin{aligned} v \circ v &= \left(\sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i} \right) \circ \left(\sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i} \circ \sqrt{\lambda_j} p_{\lambda_j} \\ &= \sum_{i=1}^r (\sqrt{\lambda_i})^2 (p_{\lambda_i})^2 \quad \text{car } p_{\lambda_i} \circ p_{\lambda_j} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i p_{\lambda_i} \quad \text{car } p_{\lambda_i} \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E(\lambda_i)$, donc par linéarité,

$$u(x) = \sum_{i=1}^r u(x_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_{\lambda_i}(x) = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i p_{\lambda_i} \right)(x), \text{ donc } u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_{\lambda_i}$$

$$u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_{\lambda_i} = v \circ v \implies v^2 = u$$

Il est clair que si R est la matrice de v , on a : $R^2 = A$, donc R est solution de l'équation $X^2 = A$.

2-c)

Notons $\sigma(w) = \{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ le spectre de w .

C'est un résultat classique que μ_i valeur propre de w implique μ_i^2 valeur propre de w^2 , donc μ_i^2 est valeur propre de u . Si on note $\sigma(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, on conclut :

$\forall \mu_i \in \sigma(w), \exists \lambda_j \in \sigma(u) / \mu_i^2 = \lambda_j$. L'endomorphisme w est symétrique, positif, donc $\mu_i \geq 0$ et il en résulte que $\mu_i = \sqrt{\lambda_j}$.

$$\sigma(w) \subset \{ \sqrt{\lambda_i} / \lambda_i \in \sigma(u) \} \quad (1)$$

Réciproquement, la matrice Y est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée (d'ailleurs). Notons β_1, \dots, β_p les valeurs propres de ω non nécessairement distinctes.

Il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^t P Y P = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p)$ où $\{\beta_1, \dots, \beta_p\} = \sigma(Y) = \sigma(w)$

$${}^tP(\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p)^2 P = Y^2 = A \text{ ou encore } A = P(\text{diag}(\beta_1^2, \dots, \beta_p^2)){}^tP.$$

Ceci permet de dire $\sigma(u) = \{\beta_1^2, \dots, \beta_p^2\} = \{\mu_1^2, \dots, \mu_s^2\}$

Donc $\forall \lambda_i \in \sigma(u) = \sigma(A), \exists \mu_j^2 / \lambda_i = \mu_j^2$, donc $\sqrt{\lambda_i} = \mu_j$.

On a :

$$\boxed{\{\sqrt{\lambda_i} / \lambda_i \in \sigma(u)\} \subset \sigma(\omega) \quad (2)}$$

Finalement, d'après les résultats (1) et (2), on a montré :

$$\boxed{\sigma(Y) = \sigma(\omega) = \{\sqrt{\lambda_i} / \lambda_i \in \sigma(A)\}}$$

• Soit $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(u)$ et $x \in F_{\sqrt{\lambda}}$. On a

$w(x) = \sqrt{\lambda}x$, donc $w^2(x) = \lambda x$ ce qui donne $u(x) = \lambda x$ puisque $w^2 = u$. Donc $x \in E(\lambda)$.

$$F_{\sqrt{\lambda}} \subset E(\lambda)$$

L'endomorphisme w est diagonalisable car sa matrice Y est symétrique réelle.

$$\text{Donc } \dim \mathbb{R}^p = \sum_{\sqrt{\lambda} \in \sigma(Y)} \dim F_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \dim F_{\sqrt{\lambda}}.$$

$$\text{De même } \dim \mathbb{R}^p = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \dim E(\lambda).$$

Or $\text{Card}(\sigma(A)) = \text{Card}(\sigma(Y)) = r$ puisque nous avons posé $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Les égalités précédentes peuvent s'écrire :

$$\sum_{i=1}^r \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = p = \sum_{i=1}^r \dim E(\lambda_i).$$

De plus, $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i) \implies \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} \leq \dim E(\lambda_i)$.

Si l'on suppose qu'il existe un indice $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\dim F_{\sqrt{\lambda_j}} < \dim E(\lambda_j)$, alors

$$\sum_{i=1}^r \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} < \sum_{i=1}^r \dim E(\lambda_i), \text{ ce qui est contradictoire.}$$

Conclusion : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i)$ et $\dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = \dim E(\lambda_i)$ impliquent $F_{\sqrt{\lambda_i}} = E(\lambda_i)$

$$\text{Pour tout } \lambda \in \sigma(A), \text{ Ker}(w - \sqrt{\lambda} \text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$$

D'après le même raisonnement de la question 2-b) où l'on a montré que $u = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda p_\lambda$,

on montrera que $w = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$ puisque $F_{\sqrt{\lambda}} = E(\lambda)$, donc $p_{\sqrt{\lambda}} = p_\lambda$.

$$\text{Donc } w = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = v$$

L'équation $X^2 = A$ admet dans l'ensemble des matrices carrées symétriques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une solution : $v = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$. Nous venons de constater que toute autre solution w de matrice positive est égale à v :

L'équation précédente a donc une seule solution v

2-d)

On a immédiatement $u \circ w = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sqrt{\lambda} \lambda p_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda \sqrt{\lambda} p_\lambda = u \circ w$.

$$\boxed{w \circ u = u \circ w \iff \sqrt{A}A = A\sqrt{A}}$$