ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−35

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $||\ ||$ la norme associée.

L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre p.

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

On dit qu'une matrice est positive si elle est symétrique et si $\langle AC, C\rangle \geq 0$ pour toute colonne $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$.

1) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée ; on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est A. Si λ est une valeur propre de A, on note p_λ le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^p$ sur le sous-espace propre $E(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

a) Justifier les propriétés suivantes :

- $p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- $\displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} p_\lambda = \mathrm{Id}\,.$

b) Montrer que l'endomorphisme $v = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \sqrt{\lambda}p_\lambda$ vérifie $v \circ v = u$.

En déduire que la matrice R associée à v est solution de l'équation $X^2 = A$.

c) Soit Y une matrice positive telle que $Y^2 = A$. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à Y. Montrer que $\sigma(Y) = \{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

Prouver ensuite que si $\lambda \in \sigma(A)$, on a $F_{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) \subset E(\lambda)$.

En déduire que $w = v$, puis qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

d) Montrer que la matrice $\sqrt{A}$ commute avec A.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1)

Sens direct : soit λ une valeur propre de A ; il existe une colonne $Y \neq (0)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $AY = \lambda Y$.
$\langle AY, Y\rangle = \langle \lambda Y, Y\rangle = \lambda ||Y||^2$. Puisque $Y \neq (0)$, alors $||Y||^2 > 0$.
L'égalité précédente devient $\lambda = \dfrac{\langle AY, Y\rangle}{||Y||^2} \geq 0$ puisque A est une matrice positive.

Sens réciproque : notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ le spectre de A, noté $\sigma(A)$ dans l'énoncé. Notons $F(\lambda_i)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i, c'est-à-dire $F(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$.
La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable et on a donc :

$$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{r} F(\lambda_i).$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \exists (Y_1, \ldots, Y_r) \in F(\lambda_1) \times \ldots \times F(\lambda_r)\ /\ Y = \sum_{i=1}^{r} Y_i.$$

$AY = A(\sum_{i=1}^{r} Y_i) = \sum_{i=1}^{r} AY_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i.$

Puisque les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, on a :
$\forall (i,j) \in ([\![1, r]\!])^2,\ i \neq j \Longrightarrow \langle Y_i, Y_j\rangle = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\langle AY, Y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i, \sum_{i=1}^{r} Y_i\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq r} \langle \lambda_i Y_i, Y_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle Y_i, Y_i\rangle\end{aligned}$$

$$\langle AY, Y\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ||Y_i||^2 \geq 0 \text{ puisque les valeurs propres sont } \geq 0.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que A soit symétrique : A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles

2–a)

On sait que $E = \mathbb{R}^p = \bigoplus_{i=1}^{r} E(\lambda_i)$ et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux,
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, notons $E_k = \bigoplus_{i \neq k} E(\lambda_i)$. Alors E_k est le sous-espace orthogonal supplémentaire de $E(\lambda_k)$. En effet, il est clair que $E(\lambda_k)$ et E_k sont supplémentaires puisque la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_k)$ et de E_k est en fait la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ donc c'est une base de E.
D'autre part, $E(\lambda_k)$ est orthogonal à tous les $E(\lambda_i)$ pour $i \neq k$, donc par linéarité du produit scalaire, il est orthogonal à leur somme, E_k.

$\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists (x_1, \ldots, x_r) \in E(\lambda_1) \times \ldots \times E(\lambda_r)\ /\ x = \sum_{i=1}^{r} x_i = x_k + \sum_{i \neq k} x_i$

Donc $p_{\lambda_k}(x) = x_k$ puisque $\sum\limits_{i \neq k} x_i \in E_k$

Considérons $j \neq k$, alors $x_k \in E_j = \bigoplus\limits_{i \neq j} E(\lambda_i)$, car E_j contient $E(\lambda_k)$; par conséquent $P_{\lambda_j}(x_k) = 0$.

Ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k}(x) = 0$.

$$\boxed{\forall (k,j) \in ([\![1,r]\!])^2,\ k \neq j \Longrightarrow p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k} = 0}$$

On vient de voir que $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i = p_{\lambda_i}(x)$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^p,\ x = \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i}(x) = (\sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i})(x) : \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i} = \mathrm{Id}_E}$$

2–b)

Soit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}$.

$$\begin{aligned}
v \circ v &= (\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}) \circ (\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}) \\
&= \sum_{1 \leq i,j \leq r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i} \circ \sqrt{\lambda_j} p_{\lambda_j} \\
&= \sum_{i=1}^{r} (\sqrt{\lambda_i})^2 (p_{\lambda_i})^2 \qquad \text{car } p_{\lambda_i} \circ p_{\lambda_j} = 0 \text{ pour } i \neq j \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i} \qquad \text{car } p_{\lambda_i} \text{ est un projecteur}
\end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E(\lambda_i)$, donc par linéarité,

$u(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} u(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}(x) = (\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i})(x)$, donc $u = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}$

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i} = v \circ v \Longrightarrow v^2 = u}$$

Il est clair que si R est la matrice de v, on a : $R^2 = A$, donc R est solution de l'équation $X^2 = A$.

2–c)

Notons $\sigma(w) = \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ le spectre de w.

C'est un résultat classique que μ_i valeur propre de w implique μ_i^2 valeur propre de w^2, donc μ_i^2 est valeur propre de u. Si on note $\sigma(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on conclut :

$\forall \mu_i \in \sigma(w),\ \exists\, \lambda_j \in \sigma(u)\ /\ \mu_i^2 = \lambda_j$. L'endomorphisme w est symétrique, positif, donc $\mu_i \geq 0$ et il en résulte que $\mu_i = \sqrt{\lambda_j}$.

$$\boxed{\sigma(w) \subset \{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(u)\} \qquad \mathbf{(1)}}$$

Réciproquement, la matrice Y est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée (d'ailleurs). Notons $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les valeurs propres de ω non nécesssairement dictinctes.

Il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^tPYP = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots \beta_p)$ où $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\} = \sigma(Y) = \sigma(w)$

$$ {}^tP(\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_p)^2P = Y^2 = A \text{ ou encore } A = P(\operatorname{diag}(\beta_1^2,\dots,\beta_p^2))^tP. $$

Ceci permet de dire $\sigma(u) = \{\beta_1^2,\dots,\beta_p^2\} = \{\mu_1^2,\dots \mu_s^2\}$

Donc $\forall \lambda_i \in \sigma(u) = \sigma(A),\ \exists\, \mu_j^2\ /\ \lambda_i = \mu_j^2$, donc $\sqrt{\lambda_i} = \mu_j$.

On a :

$$ \boxed{\{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(u)\} \subset \sigma(\omega) \qquad \textbf{(2)}} $$

Finalement, d'après les résultats **(1)** et **(2)**, on a montré :

$$ \boxed{\sigma(Y) = \sigma(\omega) = \{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(A)\}} $$

- Soit $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(u)$ et $x \in F_{\sqrt{\lambda}}$. On a

$w(x) = \sqrt{\lambda}x$, donc $w^2(x) = \lambda x$ ce qui donne $u(x) = \lambda x$ puisque $w^2 = u$. Donc $x \in E(\lambda)$.

$$ F_{\sqrt{\lambda}} \subset E(\lambda) $$

L'endomorphisme w est diagonalisable car sa matrice Y est symétrique réelle.

Donc $\dim \mathbb{R}^p = \displaystyle\sum_{\sqrt{\lambda}\in\sigma(Y)} \dim F_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \dim F_{\sqrt{\lambda}}$.

De même $\dim \mathbb{R}^p = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \dim E(\lambda)$.

Or $\operatorname{Card}(\sigma(A)) = \operatorname{Card}(\sigma(Y)) = r$ puisque nous avons posé $\sigma(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$. Les égalités précédentes peuvent s'écrire :

$\displaystyle\sum_{i=1}^r \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = p = \sum_{i=1}^r \dim E(\lambda_i)$.

De plus, $\forall i \in [\![1,r]\!],\ F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i) \Longrightarrow \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} \leq \dim E(\lambda_i)$.

Si l'on suppose qu'il existe un indice $j \in [\![1,r]\!]$ tel que $\dim F_{\sqrt{\lambda_j}} < \dim E(\lambda_j)$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^r \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} < \sum_{i=1}^r \dim E(\lambda_i)$, ce qui est contradictoire.

Conclusion : $\forall i \in [\![1,r]\!],\ F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i)$ et $\dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = \dim E(\lambda_i)$ impliquent $F_{\sqrt{\lambda_i}} = E(\lambda_i)$

Pour tout $\lambda \in \sigma(A),\ \operatorname{Ker}(w - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$

D'après le même raisonnement de la question 2–b) où l'on a montré que $u = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \lambda p_\lambda$,

on montrera que $w = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$ puisque $F_{\sqrt{\lambda}} = E(\lambda)$, donc $p_{\sqrt{\lambda}} = p_\lambda$.

$$ \textbf{Donc } w = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = v $$

> L'équation $X^2 = A$ admet dans l'ensemble des matrices carrées symétriques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une solution : $v = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$. Nous venons de constater que toute autre solution w de matrice positive est égale à v :
>
> **L'équation précédente a donc une seule solution v**

2–d)

On a immédiatement $u \circ w = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}\lambda p_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \lambda\sqrt{\lambda} p_\lambda = u \circ w$.

$$ \boxed{w \circ u = u \circ w \Longleftrightarrow \sqrt{A}A = A\sqrt{A}} $$