ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–34

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$ et soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

On a posé $f^0 = \mathrm{Id}$ (endomorphisme identité de E), $f^1 = f$ et pour tout $p \geq 1$, f^{p+1} est défini par la relation $f^{p+1} = f^p \circ f$.

On choisit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ forme une base de E.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note E_i le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f^i(a), f^{i+1}(a), \ldots, f^{n-1}(a))$.

2) Montrer que tous les sous-espaces vectoriel E_i sont stables par f, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_i \ f(x) \in E_i$$

3) Montrer que $E_0 = E$, $E_1 = \mathrm{Im}\, f$ et $E_{n-1} = \mathrm{Ker}\, f$.

4) Soit F un sous-espace vectoriel de E, non réduit au vecteur nul et stable par f.

On considère : $I = \{i \in [\![0, n-1]\!] \ / \ f^i(a) \in F\}$.

Montrer que $n - 1 \in I$.

5) On note i_0 le plus petit élément de I. Montrer que $F = E_{i_0}$. Conclure.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1)

Remarquons qu'un tel vecteur a existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.

La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est de cardinal n ; elle sera une base de E (dont la dimension est n) si et seulement si elle est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$. **(1)**

Prenons l'image des deux termes de l'égalité par f^{n-1} ; par linéarité on a :

$\lambda_0 f^{n-1}(a) + \lambda_1 f^n(a) + \cdots + \lambda_k f^{n-1+k}(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-1}(a) = 0_E$.

Or $f^n = 0 \Longrightarrow f^j = 0$ pour toute puissance $j \geq n$. De l'égalité précédente il ne reste que $\lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$. Par hypothèse $f^{n-1}(a) \neq 0_E$, donc $\lambda_0 = 0$.

L'égalité **(1)** devient $\lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$. **(1)**

En prenant l'image par f^{n-2} on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(a) = 0_E$, donc $\lambda_1 = 0$.

Finalement, en prenant les images successivement par f^{n-1}, $f^{n-2}, \dots, f^1$, on annule tous les coefficients λ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$; il reste alors $\lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$, ce qui donne $\lambda_{n-1} = 0$.

Conclusion : l'égalité $\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ implique $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$. La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre, c'est donc une base de E.

2)

$\forall k \in [\![i, n-2]\!],\ f(f^k(a)) \in E_i$ car $f^{k+1}(a) \in E_i$ puisque $k+1 \in [\![i+1, n-1]\!] \subset [\![i, n-1]\!]$.

$f(f^{n-1})(a) = 0_E$, appartient à E_i.

Donc $\forall k \in [\![i, n-1]\!],\ f(f^k(a)) \in E_i$. Remarquons que la famille $(f^i(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E_i : cette famille est génératrice de E_i et libre en tant que sous-famille de la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$.

L'image de cette base de E_i appartient à E_i, tous vecteur de E_i étant combinaison linéaire des vecteurs $(f^i(a), \dots, f^{n-1}(a))$, on conclut :

$$\boxed{\forall x \in E_i,\ f(x) \in E_i \text{ : les sous-espaces } E_i \text{ sont stables par } f}$$

Remarque :

Puisque $E_i = \operatorname{vect}(f^i(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$, on a

$f(E_i) = \operatorname{vect}(f(f^i(a)), \dots f(f^{n-1}(a))) = \operatorname{vect}(f^{i+1}(a), \dots, f^n(a)) = \operatorname{vect}(f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$ car $f^n(a) = 0_E$.

Donc $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f(E_i) = E_{i+1} = \operatorname{vect}(f^{i+1}(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$

3)

Il est clair que $\boxed{E_0 = E}$

D'après ce que nous venons de dire, $\boxed{f(E_0) = E_1 = \operatorname{Im} f}$

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = n - (n-1) = 1$ puisque $\dim E_1 = n - 1$. Il est évident que $f^{n-1}(a) \in \operatorname{Ker} f$ et $f^{n-1}(a) \neq 0_E$, donc $f^{n-1}(a)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$:

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(f^{n-1}(a))}$$

4)

Puisque $F \neq \{0_E\}$, il existe un vecteur $u \neq 0_E$ dans F, et il existe $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \ / \ u = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$.

Puisque $u \neq 0_E$, il existe au moins une coordonnée de u dans la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ qui soit non nulle. Notons i le plus petit indice k de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k \neq 0$. Cela veut dire que $u = \sum_{k=i}^{n-1} x_k f^k(a)$. Prenons l'image par f^{n-1-i} de cette égalité, il vient $f^{n-1-i}(u) = x_i f^{n-1}(a)$. Par stabilité de F, puisque u appartient à F toutes les images de u par les puissances de f sont dans F, donc $f^{n-1-i}(u) \in F$. Il en résulte que $x_i f^{n-1}(a)$ appartient à F et puisque $x_i \neq 0$, on en conclut que $\boxed{f^{n-1}(a) \in F}$

5)

Si l'on note i_0 le plus petit élément de I (il en existe puisque I n'est pas vide : il contient $n-1$), cela veut dire que $f^{i_0}(a), f^{i_0+1}(a), \dots, f^{n-1}(a)$ sont tous dans F. Donc parce que F est un espace vectoriel, on a $\boxed{E_{i_0} \subset F}$

Réciproquement, soit $x \in F$.

Il existe $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \ / \ x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) + \sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$.

On sait que $\sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a) \in E_{i_0}$.

Si $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) \neq 0_E$, il existe des indices $k \in [\![0, i_0-1]\!] \ / \ y_k \neq 0$. Soit i_1 le plus petit d'entre eux ; cela veut dire que $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$.

Appliquons $f^{i_0-i_1-1}$ à cette somme. Par linéarité, on obtient

$$\begin{aligned} f^{i_0-i_1-1}\Big(\sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)\Big) &= \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^{k+i_0-i_1-1}(a) \\ &= y_{i_1} f^{i_0-1}(a) + \underbrace{y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a)}_{\in E_{i_0}} \end{aligned}$$

Or $E_{i_0} \subset F$, donc $y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$.

D'autre part,
$$\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = x - \sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a) \qquad \textbf{(2)}$$

Le vecteur x appartient à F et $\sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$ également, donc $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$ appartient à F ; F est stable par f, donc aussi par toutes les puissances de f, en particulier par $f^{i_0-i_1-1}$.

$$f^{i_0-i_1-1}\Big(\sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)\Big) \text{ appartient à } F \ ;$$

cela s'exprime ainsi : $y_{i_1} f^{i_0-1}(a) + y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$.

Or $y_{i_1+1}f^{i_0}(a)+\cdots+y_{i_0-1}f^{2i_0-i_1-1}(a) \in E_{i_0} \subset F$, donc $y_{i_1+1}f^{i_0}(a)+\cdots+y_{i_0-1}f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$, et par soustraction on conclut $y_{i_1}f^{i_0-1}(a) \in F$. Mais $y_{i_1} \neq 0$, donc $f^{i_0-1}(a) \in F$.

Ceci est faux par définition de i_0 qui est le plus petit indice k tel $f^k(a) \in F$.

Conclusion : le vecteur $\displaystyle\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$ est nul ; donc d'après l'égalité **(2)**, $x = \displaystyle\sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$, donc x appartient à E_{i_0}. On vient de montrer que $F \subset E_{i_0}$

$F = E_{i_0}$: les seuls sous-espaces stables par f sont les E_i $0 \leq i \leq n$