ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–34

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$ et soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

On a posé $f^0 = \mathrm{Id}$ (endomorphisme identité de E), $f^1 = f$ et pour tout $p \geq 1$, f^{p+1} est défini par la relation $f^{p+1} = f^p \circ f$.

On choisit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ forme une base de E.

Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note E_i le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f^i(a), f^{i+1}(a), \ldots, f^{n-1}(a))$.

2) Montrer que tous les sous-espaces vectoriel E_i sont stables par f, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_i \;\; f(x) \in E_i$$

3) Montrer que $E_0 = E$, $E_1 = \mathrm{Im}\, f$ et $E_{n-1} = \mathrm{Ker}\, f$.

4) Soit F un sous-espace vectoriel de E, non réduit au vecteur nul et stable par f.

On considère : $I = \{i \in [\![0, n-1]\!] \;/\; f^i(a) \in F\}$.

Montrer que $n - 1 \in I$.

5) On note i_0 le plus petit élément de I. Montrer que $F = E_{i_0}$. Conclure.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 34

1)

Remarquons qu'un tel vecteur a existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.

La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est de cardinal n ; elle sera une base de E (dont la dimension est n) si et seulement si elle est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$. **(1)**

Prenons l'image des deux termes de l'égalité par f^{n-1} ; par linéarité on a :

$\lambda_0 f^{n-1}(a) + \lambda_1 f^n(a) + \cdots + \lambda_k f^{n-1+k}(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-1}(a) = 0_E$.

Or $f^n = 0 \Longrightarrow f^j = 0$ pour toute puissance $j \geq n$. De l'égalité précédente il ne reste que $\lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$. Par hypothèse $f^{n-1}(a) \neq 0_E$, donc $\lambda_0 = 0$.

L'égalité **(1)** devient $\lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$. **(1)**

En prenant l'image par f^{n-2} on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(a) = 0_E$, donc $\lambda_1 = 0$.

Finalement, en prenant les images successivement par f^{n-1}, $f^{n-2}, \dots, f^1$, on annule tous les coefficients λ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$; il reste alors $\lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$, ce qui donne $\lambda_{n-1} = 0$.

Conclusion : l'égalité $\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ implique $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$. La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre, c'est donc une base de E.

2)

$\forall k \in [\![i, n-2]\!]$, $f(f^k(a)) \in E_i$ car $f^{k+1}(a) \in E_i$ puisque $k+1 \in [\![i+1, n-1]\!] \subset [\![i, n-1]\!]$.

$f(f^{n-1})(a) = 0_E$, appartient à E_i.

Donc $\forall k \in [\![i, n-1]\!]$, $f(f^k(a)) \in E_i$. Remarquons que la famille $(f^i(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E_i : cette famille est génératrice de E_i et libre en tant que sous-famille de la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$.

L'image de cette base de E_i appartient à E_i, tous vecteur de E_i étant combinaison linéaire des vecteurs $(f^i(a), \dots, f^{n-1}(a))$, on conclut :

$$\boxed{\forall x \in E_i,\ f(x) \in E_i \text{ : les sous-espaces } E_i \text{ sont stables par } f}$$

Remarque :

Puisque $E_i = \text{vect}(f^i(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$, on a

$f(E_i) = \text{vect}(f(f^i(a)), \dots f(f^{n-1}(a))) = \text{vect}(f^{i+1}(a), \dots, f^n(a)) = \text{vect}(f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$ car $f^n(a) = 0_E$.

Donc $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $f(E_i) = E_{i+1} = \text{vect}(f^{i+1}(a), f^{i+1}(a), \dots, f^{n-1}(a))$

3)

Il est clair que $\boxed{E_0 = E}$

D'après ce que nous venons de dire, $\boxed{f(E_0) = E_1 = \text{Im}\, f}$

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}\, f = n - (n-1) = 1$ puisque $\dim E_1 = n - 1$. Il est évident que $f^{n-1}(a) \in \text{Ker}\, f$ et $f^{n-1}(a) \neq 0_E$, donc $f^{n-1}(a)$ est une base de $\text{Ker}\, f$:

$$\boxed{\text{Ker}\, f = \text{vect}(f^{n-1}(a))}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4)

Puisque $F \neq \{0_E\}$, il existe un vecteur $u \neq 0_E$ dans F, et il existe $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \ / \ u = \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$.

Puisque $u \neq 0_E$, il existe au moins une coordonnée de u dans la base $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ qui soit non nulle. Notons i le plus petit indice k de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k \neq 0$. Cela veut dire que $u = \sum_{k=i}^{n-1} x_k f^k(a)$. Prenons l'image par f^{n-1-i} de cette égalité, il vient $f^{n-1-i}(u) = x_i f^{n-1}(a)$. Par stabilité de F, puisque u appartient à F toutes les images de u par les puissances de f sont dans F, donc $f^{n-1-i}(u) \in F$. Il en résulte que $x_i f^{n-1}(a)$ appartient à F et puisque $x_i \neq 0$, on en conclut que $\boxed{f^{n-1}(a) \in F}$

5)

Si l'on note i_0 le plus petit élément de I (il en existe puisque I n'est pas vide : il contient $n-1$), cela veut dire que $f^{i_0}(a), f^{i_0+1}(a), \ldots, f^{n-1}(a)$ sont tous dans F. Donc parce que F est un espace vectoriel, on a $\boxed{E_{i_0} \subset F}$

Réciproquement, soit $x \in F$.

Il existe $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \ / \ x = \sum_{k=0}^{n-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) + \sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$.

On sait que $\sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a) \in E_{i_0}$.

Si $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) \neq 0_E$, il existe des indices $k \in [\![0, i_0-1]\!] \ / \ y_k \neq 0$. Soit i_1 le plus petit d'entre eux ; cela veut dire que $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$.

Appliquons $f^{i_0-i_1-1}$ à cette somme. Par linéarité, on obtient

$$\begin{aligned} f^{i_0-i_1-1}\Big(\sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)\Big) &= \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^{k+i_0-i_1-1}(a) \\ &= y_{i_1} f^{i_0-1}(a) + \underbrace{y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a)}_{\in E_{i_0}} \end{aligned}$$

Or $E_{i_0} \subset F$, donc $y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$.

D'autre part, $$\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = x - \sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a) \qquad \textbf{(2)}$$

Le vecteur x appartient à F et $\sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$ également, donc $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$ appartient à F ; F est stable par f, donc aussi par toutes les puissances de f, en particulier par $f^{i_0-i_1-1}$.

$$f^{i_0-i_1-1}\Big(\sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)\Big) \text{ appartient à } F \ ;$$

cela s'exprime ainsi : $y_{i_1} f^{i_0-1}(a) + y_{i_1+1} f^{i_0}(a) + \cdots + y_{i_0-1} f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or $y_{i_1+1}f^{i_0}(a)+\cdots+y_{i_0-1}f^{2i_0-i_1-1}(a) \in E_{i_0} \subset F$, donc $y_{i_1+1}f^{i_0}(a)+\cdots+y_{i_0-1}f^{2i_0-i_1-1}(a) \in F$, et par soustraction on conclut $y_{i_1}f^{i_0-1}(a) \in F$. Mais $y_{i_1} \neq 0$, donc $f^{i_0-1}(a) \in F$.

Ceci est faux par définition de i_0 qui est le plus petit indice k tel $f^k(a) \in F$.

Conclusion : le vecteur $\sum_{k=0}^{i_0-1} y_k f^k(a) = \sum_{k=i_1}^{i_0-1} y_k f^k(a)$ est nul ; donc d'après l'égalité **(2)**, $x = \sum_{k=i_0}^{n-1} y_k f^k(a)$, donc x appartient à E_{i_0}. On vient de montrer que $F \subset E_{i_0}$

$F = E_{i_0}$: les seuls sous-espaces stables par f sont les E_i $0 \leq i \leq n$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021