



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ-33

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n .

Si $P \in E$, on note P' le polynôme dérivé de P défini par

$$P' = \sum_{p=1}^r p a_p X^{p-1} \text{ si } P = \sum_{p=0}^r a_p X^p.$$

On admet que les règles de dérivation dans $\mathbb{C}_n[X]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P de E soit divisible par son polynôme dérivé P' (c'est-à-dire : il existe $Q \in E$ tel que $P = QP'$).

On pourra distinguer les cas : P est le polynôme nul, P est une constante non nulle, P est de degré 1, P est de degré supérieur ou égal à 2. Dans ce dernier cas, on cherchera une condition sur le nombre des racines distinctes de P .

2) Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{C}, (u(P))(x) = (x^2 + 1)P'(x) - nxP(x)$$

Montrer que u est un endomorphisme de E .

3) Vérifier que le complexe λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, (x^2 + 1)P'(x) = (nx + \lambda)P(x) \quad (1)$$

4-a) Montrer que $-in$ et in sont valeurs propres de u (avec $i^2 = -1$).

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{in, -in\}$. Montrer que P ne peut être solution de (1) que s'il existe un entier naturel k et un polynôme $Q \in E$ tels que $\forall x \in \mathbb{C}, P(x) = (x^2 + 1)^k Q(x)$.

Que devient alors l'égalité (1) ?

c) Montrer que $-i(n - 2k)$ et $i(n - 2k)$ sont valeurs propres de u .

d) En déduire que u est diagonalisable.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

Notons (0) le polynôme nul.

1) _____

- $P = (0) \implies P' = (0)$: le polynôme P' divise le polynôme P car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ $P = QP'$.
- Si P est une constante non nulle, alors $P' = (0)$: le polynôme P n'est pas divisible par P' car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ $QP' = (0)$ or $P \neq (0)$
- Si $\deg(P) = 1$, alors P' est une constante non nulle : P' divise P car $P = QP'$ avec $Q = \frac{1}{P'}P$.
- Si $\deg(P) \geq 2$.

Supposons que P' divise P , alors $\deg(P') \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme P' a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.

* Si l'on note k l'ordre de multiplicité de la racine α de P' . Puisque P' divise P , alors α est une racine de P et $k + 1$ est l'ordre de multiplicité de la racine α dans P .

En effet, si l'on note m l'ordre de la racine α dans P , on a

$$P = (X - \alpha)^m Q \text{ avec } Q \in E \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

$$P' = (X - \alpha)^{m-1} (mQ + (X - \alpha)Q').$$

Or $mQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$, ce qui prouve que l'ordre de multiplicité de α dans P' vaut $m - 1$.

Donc si $m - 1 = k$, alors $m = k + 1$.

* Si l'on note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines distinctes de P' dans \mathbb{C} et k_1, \dots, k_p les ordres de multiplicité respectifs de ces racines dans P' , alors $\deg(P') = k_1 + \dots + k_p$; $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont racines de P avec $k_1 + 1, \dots, k_p + 1$ pour ordres de multiplicité respectifs dans P . Il s'ensuit que $\deg(P) \geq k_1 + \dots + k_p + p$, soit $\deg(P) \geq \deg(P') + p$.

Il y a inégalité car on est sûr que P admet $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ mais il en admet peut-être d'autres, en particulier des racines simples (qui ne sont pas racines de P').

Mais $\deg(P) = \deg(P') + 1$, donc ceci impose $p = 1$.

Si P' divise P , alors P a une seule racine.

Réciproquement, si P a une seule racine (et $\deg(P) \geq 2$), alors P' divise P de manière évidente.

P' divise P si et seulement si P est le polynôme nul ou P a une seule racine

2) _____

- Linéarité de u .

$\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} (u(P + \alpha Q))(x) &= (x^2 + 1)(P + \alpha Q)'(x) - nx(P + \alpha Q)(x) \\ &= (x^2 + 1)(P'(x) + \alpha Q'(x)) - nxP(x) - nx\alpha Q(x) \\ &\quad \text{d'après les règles de dérivation rappelées} \\ &= (x^2 + 1)P'(x) - nxP(x) + \alpha((x^2 + 1)Q'(x) - nxQ(x)) \\ &= (u(P))(x) + \alpha(u(Q))(x) = (u(P) + \alpha u(Q))(x) \end{aligned}$$

Donc $u(P + \alpha Q) = u(P) + \alpha u(Q)$: u est linéaire.

- $u(P) \in E$.

Soit $P \in E$; il existe $(a_n, \dots, a_0) \in (\mathbb{C})^{n+1}$ tels que $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$.

On ne suppose pas ici que le degré de P vaut n ; on utilise le fait que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de E .

Le terme de plus haut degré de $(X^2 + 1)P'$ est en X^{n+1} et vaut $na_n X^{n+1}$; celui de nXP est aussi en X^{n+1} et vaut $na_n X^{n+1}$. Ces deux termes disparaissent et finalement les termes de $(X^2 + 1)P' - nXP$ ont un degré qui ne dépasse pas n .

$$\forall P \in E, u(P) \in E$$

L'application u est linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de E

3) _____

Le complexe λ est valeur propre de u si et seulement si il existe un polynôme P non nul dans E tel que : $u(P) = \lambda P$. cela se traduit par

$$(X^2 + 1)P' - nXP = \lambda P \text{ soit aussi } (X^2 + 1)P' = (nX + \lambda)P$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ valeur propre de } u \text{ équivaut à } \exists P \neq (0) \in E / \forall x \in \mathbb{C}, (x^2 + 1)P'(x) = (nx + \lambda)P(x) \quad (1)$$

4-a) _____

• Prenons, par exemple, $\lambda = -ni$ et testons si $-ni$ est valeur propre de u .

L'égalité (1) appliquée à $\lambda = ni$ donne $(X^2 + 1)P' = n(X - i)P$, soit $(X + i)(X - i)P' = n(X - i)P$ et, puisque que le polynôme $(X - i)$ n'est pas le polynôme nul, on a : $(X + i)P' = nP$.

On conclut que P' divise P , $-i$ est racine de P , donc, d'après la première question, P a une seule racine $-i$ puisque $(X + i)$ divise P .

Le polynôme $P = (X + i)^n$ convient

$-ni$ est valeur propre de u et le polynôme $(X + i)^n$ est un vecteur propre associé.

On montre de même que ni est valeur propre de u et que le polynôme $(X - i)^n$ est un vecteur propre associé.

4-b) _____

Ici $nX + \lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines.

Un polynôme non nul P vérifie (1) si $(X^2 + 1)P' = (nX + \lambda)P$. Or $X^2 + 1$ admet i et $-i$ comme racine, donc P aussi (puisque $nX + \lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines).

Donc P est divisible par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Désignons par k le plus grand entier tel que $(X^2 + 1)^k$ divise P . On a ainsi

$\exists Q \in E / P = (X^2 + 1)^k Q$ avec $\deg(Q) \leq n - 2k$. L'égalité (1) devient :

$(X^2 + 1)(2kX(X^2 + 1)^{k-1}Q + (X^2 + 1)^k Q') = (nX + \lambda)(X^2 + 1)^k Q$, qui équivaut après avoir simplifié par le polynôme non nul $(X^2 + 1)^k$:

$$2kXQ + (X^2 + 1)Q' = (nX + \lambda)Q \text{ soit finalement } (X^2 + 1)Q' = ((n - 2k)X + \lambda)Q \quad (2)$$

4-c) _____

En appliquant les résultats du 4-a) à l'entier naturel $n - 2k$ et au polynôme Q , on trouve que pour $\lambda = -(n - 2k)i$, le polynôme $Q = (X + i)^{n-2k}$ est solution de (2)

Donc $P = (X^2 + 1)^k (X + i)^{n-2k}$ est solution de (1).

De même, pour $\lambda = (n - 2k)i$, le polynôme $P = (X^2 + 1)^k (X - i)^{n-2k}$ est solution de (1).

4- d) _____

* Si n est pair, k varie entre 0 et $\frac{n}{2}$, donc k prend $\frac{n}{2} + 1$ valeurs. Pour $k < \frac{n}{2}$, les valeurs propres $i(n - 2k)$ et $-i(n - 2k)$ sont distinctes, mais pour $k = \frac{n}{2}$ elles valent toutes les deux 0.

Il y a donc $2(\frac{n}{2} + 1) - 1 = n + 1$ valeurs propres distinctes.

* Si n est impair, k varie entre 0 et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière du réel x). Puisque $2k$ ne peut pas être égal à n , toutes les valeurs propres sont distinctes ; il y en a donc $2(1 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) = 2 + n - 1 = n + 1$.

En effet, si $n = 2j + 1$, alors $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = j$, donc $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 2j = n - 1$.

L'endomorphisme u admet $n + 1$ valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension $n + 1$.

u est donc diagonalisable (et les sous-espaces propres sont de dimensions 1)