ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−32

On rappelle que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Montrer que la seule valeur propre réelle possible est 0.

Montrer que $P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ existe et est orthogonale.

2) Vérifier que P n'admet pas -1 pour valeur propre.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un colonne propre associée. On a $AX = \lambda X$ avec $X \neq (0)$. Multiplions les deux termes par ${}^tX$, on obtient ${}^tXAX = \lambda^tXX$

Transposons cette égalité, il vient ${}^t({}^tXAX) = \lambda^t({}^tXX)$, soit ${}^tX^tA^t({}^tX) = \lambda^tX^t({}^tX)$

ce qui s'écrit $-{}^tXAX = \lambda^tXX$, car A est antisymétrique. Or $AX = \lambda X$, donc on obtient $-\lambda^tXX = \lambda^tXX$.

La colonne X est une colonne propre, donc non nulle.

$X \neq (0) \Longrightarrow {}^tXX > 0$. On peut donc simplifier la dernière égalité par ${}^tXX$ et on obtient $-\lambda = \lambda$, donc $\lambda = 0$.

On conclut que -1 n'est pas valeur propre de A, donc $I_n + A$ est inversible.

Puisque 1 n'est pas valeur propre de A, $A - I_n$ est inversible, donc $I_n - A$ aussi :

$$\boxed{P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \text{ existe}}$$

$$\begin{aligned}
{}^tP &= {}^t((I_n + A)^{-1})^t(I_n - A) \\
&= \left({}^t(I_n + A)\right)^{-1}(I_n + A) \qquad \text{puisque } A \text{ est antisymétrique} \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n + A)
\end{aligned}$$

Remarque : $(I_n - A)^{-1}$ existe effectivement puisque 1 n'est pas valeur propre de A.

Remarquons également pour la suite que $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = (I_n + A)(I_n - A)$

$$\begin{aligned}
{}^tPP &= \Big((I_n - A)^{-1}(I_n + A)\Big)\Big((I_n - A)(I_n + A)^{-1}\Big) \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} \qquad \text{d'après la remarque précédente} \\
&= I_n \times I_n = I_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{{}^tPP = I_n \text{ veut dire que la matrice } P \text{ est orthogonale}}$$

2)

-1 n'est pas valeur propre de P équivaut à dire que $P + I_n$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $(I_n + P)X = (0)$. Ceci équivaut à $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}X = -X$.

Posons $Y = (I_n + A)^{-1}X$; on a $X = (I_n + A)Y$.

L'égalité $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}X = -X$ équivaut à $(I_n - A)Y = -(I_n + A)Y$, soit $Y = -Y$ ou encore $Y = (0)$. Mais $X = (I_n + A)Y$, donc $X = (0)$

$$\boxed{\text{Conclusion : } (I_n + P)X = (0) \Longrightarrow X = (0) \text{ : } -1 \text{ n'est pas valeur propre de } P}$$